

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ali je sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  rešljiv? Ali je sistem  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}$  rešljiv? Poišči pravokotni projekciji  $\mathbf{b}_1$  in  $\mathbf{b}'_1$  vektorja  $\mathbf{b}$  na  $C(A)$  in  $C(A')$  ter zapiši vse rešitve sistemov  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$  in  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_1$ .
  - (b) Zapiši matrice  $U$ ,  $S$  in  $V$ , da bo  $USV^T$  singularni razcep matrice  $A$ . Pomagaj si z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji matrice  $A^T A$ .
  - (c) Poišči Moore–Penroseov posplošeni inverz matric  $A$  in  $A'$  ter izračunaj  $A^+\mathbf{b}$  in  $A'^+\mathbf{b}$ . Komentiraj rezultat.
  - (d) Reši nalogo še v octave-u ali Matlab-u, uporabi ukaza `svd(A)` in `pinv(A)`.
2. **SVD in kompresija slik.** Sivinsko sliko lahko predstavimo z matrico  $A$ . (Barvno pa s tremi matrikami, recimo  $A_R$ ,  $A_G$  in  $A_B$ .) Iz matrik  $U$ ,  $S$  in  $V$  SVD razcepa potem  $A$  rekonstruiramo kot  $USV^T$ . Lahko se pa odločimo, da ‘majhne’ singularne vrednosti niso bistvene in jih postavimo na 0. Vsako singularno vrednost  $\sigma_i$  torej zamenjamo s  $\sigma'_i = 0$ , če je  $\sigma_i < \sigma$ , sicer pustimo  $\sigma'_i = \sigma_i$ . Naj bo  $S'$  matrika, ki ima  $\sigma'_i$  na diagonalni. Potem je  $A' = US'V^T$  ‘približek’ za našo začetno sliko  $A$ .
- (a) Prenesi sliko `lena512.mat` s spletne učilnice in jo naloži v octave/Matlab: `A = imread("lena512.mat")`. Za izris slike lahko uporabiš `imshow(A)`.
  - (b) Poišči SVD razcep matrice  $A$ .
  - (c) Poišči približke  $A'$  za  $A$  tako, da uporabiš le 10, 20, 50, 100 največjih singularnih vrednosti matrice  $A$ , in izriši pripadajoče slike. Oceni kvaliteto približkov vizualno.
  - (d) Kolikšno količino podatkov moramo dejansko shraniti za vsakega od približkov?