Algoritmi in podatkovne strukture

Deli in vladaj ter Karatsubov/Gaussov algoritem

Deli in vladaj

- Metoda snovanja algoritmov.
  - Rekurzivni algoritem.
- Koraki.
  - *Deli* – delitev naloge:
    - na eno ali več manjših nalog.
  - *Reši manjše naloge:*
    - uporaba rekurzije.
  - *Vladaj* – združevanje rešitev:
    - iz rešitev manjših nalog sestavimo rešitev osnovne naloge.

Znani algoritmi

- Dvojiško iskanje (oz. bisekcija).
- Urejanje.
  - QuickSort.
  - MergeSort (in štetje inverzij).
- Množenje velikih celih števil.
  - Karatsuba, Toom-Cook.
- Množenje matrik.
  - Strassen.
  - Winograd.

Analiza zahtevnosti

- Rekurenčna enačba.

$$
\begin{aligned}
T(1) &= c \\
T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)
\end{aligned}
$$

- *a* – število podnalog (podproblemov);
- *b* – faktor delitve naloge;
- *c* – zahtevnost pri *n=1*;
- *O(n^d^)* – zahtevnost delitve in združevanja.

„Master theorem"

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + O(n^d)$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & a < b^d \\ O(n^d \log n) & a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

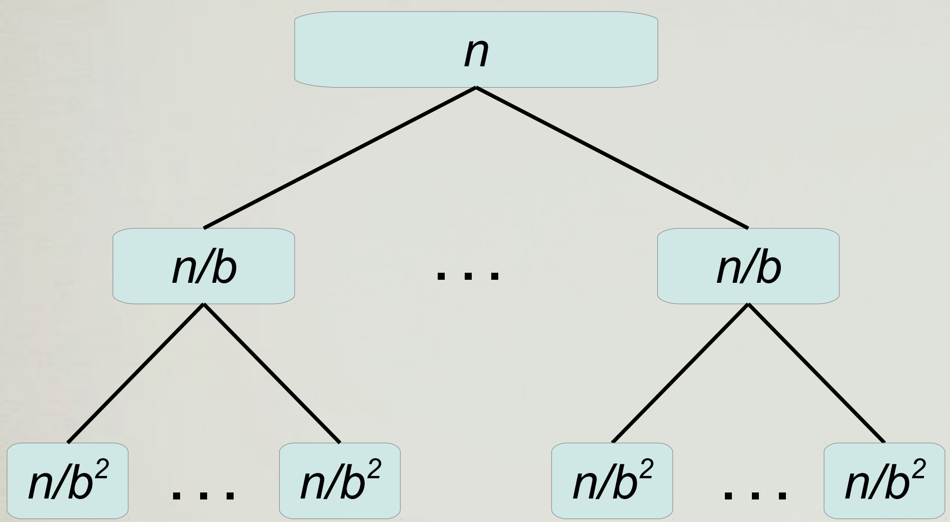
„*Master theorem*“ - intuicija

$$T(n) \quad = \quad aT(\frac{n}{b}) + O(n^d)$$

1

a

a^2



n^d

$a(\frac{n}{b})^d$

$a^2(\frac{n}{b^2})^d$

Zahtevnost *j*-tega nivoja

$$(\frac{a}{b^d})^j n^d$$

Število podnalog na *j*-tem nivoju.

a … hitrost naraščanja števila podnalog (sile zla)
b^d … hitrost zmanjševanja velikosti podnalog (sile dobrega)

„*Master theorem*" - intuicija

$$\left(\frac{a}{b^d}\right)^j n^d$$

a *b^d*

sile zla *vs.* sile dobrega

$a < b^d$ → večja globina → manj dela → največ dela v korenu

$a = b^d$ → na vsaki globini je enako dela

$a > b^d$ → večja globina → več dela → največ dela v listih

$$\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} n^d = a^{\log_b n}\left(b^{\log_b n}\right)^{-d} n^d = a^{\log_b n}$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & a < b^d \\ O(n^d \log n) & a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

Primeri

- Dvojiško iskanje (1,2,0).
- QuickSort povprečje (2,2,1).
- MergeSort in štetje inverzij (2,2,1).
- Množenje velikih števil (4,2,1).
- Karatsuba (3,2,1).
- Množenje matrik (8,2,2).
- Strassen (7,2,2).

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & a < b^d \\ O(n^d \log n) & a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

Množenje velikih celih števil

- Kako velika so velika cela števila?
- Kako števila predstavimo v programu?

$$a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$$

Običajno množenje

$$a \cdot b$$

$$(a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0) \cdot (b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_0)$$

$$\begin{array}{llll}
 & (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0) \cdot & b_{n-1} & \cdot\ 10^{n-1} \\
+ & (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0) \cdot & b_{n-2} & \cdot\ 10^{n-2} \\
 & \quad \cdots & & \\
+ & (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0) \cdot & b_1 & \cdot\ 10^{1} \\
+ & (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0) \cdot & b_0 & \cdot\ 10^{0}
\end{array}$$

 # množenj

n

+n

…

+n

+n

$$O(n^2)$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & a < b^d \\ O(n^d \log n) & a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

Deli in vladaj

$$a = a_1 a_0$$

$$b = b_1 b_0$$

$$\begin{aligned} c = & \quad a \cdot b = \\ = & \quad (a_1 \cdot 10 + a_0)(b_1 \cdot 10 + b_0) = \\ = & \quad a_1 b_1 \cdot 10^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) \cdot 10 + a_0 b_0 \end{aligned}$$

$$T(n) = 4T(\tfrac{n}{2}) + O(n)$$

$$O(n^2)$$

Deli in vladaj - *Karatsuba*

$$a = a_1 a_0$$

$$b = b_1 b_0$$

$$c_2 = a_1 \cdot b_1$$
$$c_0 = a_0 \cdot b_0$$
$$c_1 = (a_1 + a_0) \cdot (b_1 + b_0) - c_2 - c_0$$

$$c = c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$O\left(n^{\log_2 3}\right) = O\left(n^{1.585}\right)$$