REŠITVE izpita 27.1.2025

1. naloga **(30 točk);** Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{1-n}{2n+1}$.

a) **(10 točk)** Izračunajte prve tri člene zaporedja a_n. Ali je $-\frac{4}{11}$ člen zaporedja a_n?

$$a_0 = \frac{1-0}{2\cdot 0+1} = 1$$

$$a_1 = \frac{1-1}{2\cdot 1+1} = 0$$

$$a_2 = \frac{1-2}{2\cdot 2+1} = -\frac{1}{5}$$

$$a_n = -\frac{4}{11}$$

$$\frac{1-n}{2n+1} = -\frac{4}{11}$$

$$11(1-n) = -4(2n+1)$$

$$11-11n = -8n-4$$

$$3n = 15$$

$$n = 5$$

$a_5 = -\frac{4}{11}$ je člen a_n

b) **(10 točk)** Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n \quad /:n}{2n+1 \quad /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}-1}{2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = -\frac{1}{2}$$

c) **(10 točk)** Koliko členov zaporedja leži zunaj ϵ-okolice limite za $\epsilon = \frac{1}{10}$?

Za člene, ki ležijo znotraj ε-okolice limite $-\frac{1}{2}$ velja:

$$-\frac{1}{2}-\varepsilon < a_n < -\frac{1}{2}+\varepsilon$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{10} < \frac{1-n}{2n+1} < -\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

$$-\frac{6}{10} < \frac{1-n}{2n+1} \qquad\qquad \frac{1-n}{2n+1} < \frac{-4}{10}$$

$$-\frac{3}{5} < \frac{1-n}{2n+1} \qquad\qquad \frac{1-n}{2n+1} < -\frac{2}{5}$$

$$-3(2m+1) < 5(1-m)$$
$$-6m-3 < 5-5m$$
$$-m < 8 \quad / \cdot (-1)$$
$$m > -8 \checkmark$$

velja za vse $m \in \mathbb{N}$

$$5(1-m) < -2(2m+1)$$
$$5-5m < -4m-2$$
$$-m < -7 \quad / \cdot (-1)$$
$$m > 7$$

$\downarrow$

znotraj ε-okolice limite so vsi členi od a_8 dalje

$\Downarrow$

zunaj ε-okolice so le členi $a_0, a_1, \ldots, a_7 \rightarrow$ 8 členov

2. naloga **(40 točk);** Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$, kjer $\log x$ označuje naravni logaritem (logaritem z osnovo e).

a) **(15 točk)** Določite definicijsko območje, ničle ter lokalne ekstreme funkcije f.

- $D_f: x > 0$

- ničle: $(\log x)^2 = 0$
$$\log x = 0$$
$$x = e^0 = 1$$

- lokalni ekstremi:
$$f'(x) = \frac{2 \cdot \log x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2 \cdot 1}{x^2} =$$
$$= \frac{2 \cdot \log x - (\log x)^2}{x^2} = \frac{\log x\,(2 - \log x)}{x^2}$$

stacionarne točke: $f'(x) = 0$
$$\log x\,(2-\log x) = 0$$

$$\log x = 0 \qquad\qquad 2 - \log x = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad \log x = 2$$
$$x = e^2$$

f':

	0		1		e^2	
		$-$ ↘		$+$ ↗		$-$ ↘

$T(1,0)$ je lok. min.

$T(e^2, \frac{4}{e^2})$ je lok. max.

b) **(15 točk)** Izračunajte $\int f(x)\,dx$.

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\log x)^3}{3} + C$$

$$u = \log x$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

c) **(10 točk)** Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $f(x)$, $y = 0$ in $x = e^2$.

$$S = \int_1^{e^2} f(x)\,dx = \left.\frac{(\log x)^3}{3}\right|_1^{e^2} = \frac{(\log e^2)^3}{3} - \frac{(\log 1)^3}{3}$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

3. naloga **(30 točk);** Naj bosta podani matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) **(20 točk)** Z uporabo Gaussove eliminacije izračunajte A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} /\cdot 3 \\ /\cdot 2 \end{array} \oplus \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \ominus \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} /:2 \\ /\cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

b) **(10 točk)** Rešite matrično enačbo $AX = B^T$.

$$A^{-1} \cdot \backslash\ AX = B^T$$

$$X = A^{-1} \cdot B^T$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$