UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE I ZA VSP

GREGOR DOLINAR
URŠKA DEMŠAR

LJUBLJANA, 2004

Kazalo

Poglavje 1

Množice in števila

Množice in preslikave Kartezični produkt $A \times B$ množic A in B je množica vseh urejenih parov, pri čemer je na prvem mestu para element množice A, na drugem mestu pa element množice B. Če ima prva množica kartezičnega produkta n elementov, druga množica pa m elementov, potem ima njun kartezični produkt nm elementov. Potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ dane množice A je množica vseh podmnožic množice A. Elementi potenčne množice $\mathcal{P}(A)$ so torej množice. Vsaka podmnožica množice A je element $\mathcal{P}(A)$. Če ima množica n elementov, potem ima njena potenčna množica 2^n elementov.
Za binomsko relacijo $\mathcal{R}$ na množici A pravimo, da je:
refleksivna, če je $a\mathcal{R}a$ za vsak $a \in A$,
simetrična, če iz $a\mathcal{R}b$ sledi $b\mathcal{R}a$ za vsak $a \in A$ in vsak $b \in A$,
antisimetrična, če iz $a\mathcal{R}b$ in $b\mathcal{R}a$ sledi $a = b$ za vsak $a \in A$ in vsak $b \in A$,
tranzitivna, če iz $a\mathcal{R}b$ in $b\mathcal{R}c$ sledi $a\mathcal{R}c$ za vsak $a \in A$, vsak $b \in A$ in vsak $c \in A$,
sovisna, če za poljubna različna a in b iz množice A velja $a\mathcal{R}b$ ali $b\mathcal{R}a$.

1. Zapiši množico:

   (a) pozitivnih večkratnikov števila 5,

   (b) vseh enomestnih praštevil.

   Rešitev: (a) Množico vseh pozitivnih večkratnikov števila 5 lahko zapišemo na več načinov:

   $$\{5, 10, 15, \ldots\} = \{5n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   (b) Množica vseh enomestnih praštevil je:

   $$\{2, 3, 5, 7\}.$$

2. Zapiši unijo in presek naslednjih množic:

   (a) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

   (b) $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{a, b, c\}$.

   Rešitev: Unija in presek množic A in B sta

   (a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1\}$,

   (b) $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$, $A \cap B = \{a\}$.

3. Določi potenčno množico množice $A = \{a, b, c\}$. Koliko elementov ima potenčna množica?

   Rešitev: Množica A ima 3 elemente, zato ima njena potenčna množica $2^3 = 8$ elementov. Vse podmnožice množice $\{a, b, c\}$ so $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, torej je

   $$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

4. Dana je univerzalna množica $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ in njene podmnožice $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ in $C = \{3, 6, 9\}$. Zapiši naslednje množice A^C, U^C, $B \setminus C$, $B^C \setminus (A \cap C)^C$.

   Rešitev: V množici A^C so tisti elementi univerzalne množice U, ki niso v množici A. Torej je

   $$A^C = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 7, 8, 9\}.$$

   V množici U^C so tisti elementi množice U, ki niso v U. Takih elementov ni, torej je

   $$U^C = U \setminus U = \emptyset.$$

   V množici $B \setminus C$ so tisti elementi množice B, ki niso v C. Tako je

   $$B \setminus C = \{1, 3, 5, 7\} \setminus \{3, 6, 9\} = \{1, 5, 7\}.$$

   Množico $B^C \setminus (A \cap C)^C$ bomo določili postopoma. Ker je $A \cap C = \{3, 6\}$, je $(A \cap C)^C = U \setminus (A \cap C) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$. Zapišimo še $B^C = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ in dobimo

   $$B^C \setminus (A \cap C)^C = \{2, 4, 6, 8, 9\} \setminus \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\} = \{6\}.$$

5. Univerzalna množica naj bo množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$. Dane so še naslednje podmnožice množice $\mathbb{N}$: $A = \{2n : n \in \mathbb{N},\ n \leq 4\}$, $B = \{n : n \in \mathbb{N},\ n \text{ je praštevilo},\ n < 7\}$, C je množica vseh lihih števil manjših od 10.

   Zapiši naslednje množice: $A \cap B$, $B \cup C$, $B \setminus C$, $A \times B$ in potenčno množico $\mathcal{P}(A)$.

   Rešitev: Zapišimo množice A, B in C na malo bolj pregleden način:

$$\begin{aligned} A =& \{2n : n \in \mathbb{N},\ n \leq 4\} = \{2,4,6,8\}, \\ B =& \{n : n \in \mathbb{N},\ n \text{ je praštevilo},\ n < 7\} = \{2,3,5\}, \\ C =& \{1,3,5,7,9\}. \end{aligned}$$

   Da ne bomo pozabili zapisati kakšnega od elementov kartezičnega produkta množic A in B ter kakšnega elementa potenčne množice $\mathcal{P}(A)$, izračunajmo najprej koliko elementov imata ti dve množici. Množica A ima 4 elemente, množica B pa 3 elemente, zato ima množica $A \times B$ skupaj $4 \cdot 3 = 12$ elementov, potenčna množica $\mathcal{P}(A)$ pa $2^4 = 16$ elementov. Iskane množice so:

$$\begin{aligned} A \cap B =& \{2,4,6,8\} \cap \{2,3,5\} = \{2\}, \\ B \cup C =& \{2,3,5\} \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,2,3,5,7,9\}, \\ B \setminus C =& \{2,3,5\} \setminus \{1,3,5,7,9\} = \{2\}, \\ A \times B =& \{2,4,6,8\} \times \{2,3,5\} = \{(2,2),(2,3),(2,5),(4,2),(4,3),(4,5), \\ & (6,2),(6,3),(6,5),(8,2),(8,3),(8,5)\}, \\ \mathcal{P}(A) =& \{\emptyset,\{2\},\{4\},\{6\},\{8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}, \\ & \{2,4,6\},\{2,4,8\},\{2,6,8\},\{4,6,8\},\{2,4,6,8\}\}. \end{aligned}$$

6. Za vsako od danih relacij

   (a) deljivost naravnih števil

   (b) pravokotnost premic v ravnini

   ugotovi, ali je refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna ali sovisna.

   Rešitev: (a) Najprej si oglejmo relacijo deljivosti naravnih števil. Simbol za relacijo $m\mathcal{R}n$ v tem primeru pomeni: število m deli število n.

Relacija je refleksivna, če $n\mathcal{R}n$ za vsako naravno število n. Ker vsako število deli samega sebe, torej vedno n deli n, je deljivost refleksivna relacija.

Relacija je simetrična, če iz $m\mathcal{R}n$ sledi $n\mathcal{R}m$. Če m deli n potem ni nujno, da n deli m. Na primer, 2 deli 4, ampak 4 ne deli 2. Torej deljivost ni simetrična relacija.

Relacija je antisimetrična, če iz $m\mathcal{R}n$ in $n\mathcal{R}m$ sledi, da je $m = n$. Če m deli n in hkrati n deli m, je to mogoče samo, če je $m = n$. Torej deljivost je antisimetrična relacija.

Relacija je tranzitivna, če iz $m\mathcal{R}n$ in $n\mathcal{R}o$ sledi $m\mathcal{R}o$. Če m deli n in n deli o, potem prav gotovo tudi m deli o, na primer, 3 deli 6 in 6 deli 36, torej tudi 3 deli 36. Deljivost je tranzitivna relacija.

Relacija je sovisna, če za poljubna različna m in n velja $m\mathcal{R}n$ ali $n\mathcal{R}m$. Če si izberemo poljubni števili, potem ni nujno res, da bi eno delilo drugo. Na primer, 2 ne deli 5 in 5 ne deli 2. Torej deljivost ni sovisna relacija.

(b) Oglejmo si sedaj še pravokotnost premic v ravnini. Simbol za relacijo $p\mathcal{R}q$ v tem primeru pomeni: premica p je pravokotna na premico q.

Ker premica ni pravokotna nase, pravokotnost ni refleksivna relacija.

Če je premica p pravokotna na premico q, potem je seveda tudi premica q pravokotna na premico p. Pravokotnost je zato simetrična relacija.

Ni pa pravokotnost antisimetrična relacija. Če je namreč premica p pravokotna na premico q, potem je tudi premica q pravokotna na premico p, od tod pa seveda ne sledi, da je premica p kar enaka premici q.

Če je premica p pravokotna na premico q, premica q pa pravokotna na premico r, potem sledi, da sta premici p in r vzporedni, ne pa pravokotni. Torej pravokotnost ni tranzitivna relacija.

Pravokotnost tudi ni sovisna relacija. Če si izberemo poljubni različni premici p in q v ravnini, vsekakor ti premici nista nujno pravokotni.

7. Dani sta množici $A = \{2, 6, 10\}$ in $B = \{3, 5, 7, 9, 13\}$ ter preslikavi $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to A$, ki sta definirani s predpisoma $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g(x) = \max\{6, x-3\}$. Ali sta preslikavi injektivni, surjektivni, bijektivni? Določi še preslikavi $f \circ g$ in $g \circ f$.

Rešitev: Izračunajmo najprej vse vrednosti, ki jih preslikava f zavzame na definicijskem območju A: $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3$, $f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = 5$ in

$f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 + 2 = 7$.

Preslikava f je injektivna, saj preslika različne elemente definicijskega območja, ki je v tem primeru množica A, v različne elemente v zalogi vrednosti ($f(2) \neq f(6)$, $f(2) \neq f(10)$, $f(6) \neq f(10)$). Ni pa surjektivna, saj je zaloga vrednosti preslikave f množica $\{3, 5, 7\}$, ki pa ni enaka množici $B = \{3, 5, 7, 9, 13\}$. Preslikava je bijektivna, če je injektivna in surjektivna. Ker preslikava f ni surjektivna, seveda tudi ni bijektivna.

Podobno izračunamo zalogo vrednosti preslikave g: $g(3) = \max\{6, 0\} = 6$, $g(5) = \max\{6, 2\} = 6$, $g(7) = \max\{6, 4\} = 6$, $g(9) = \max\{6, 6\} = 6$ in $g(13) = \max\{6, 10\} = 10$, torej je zaloga vrednosti množica $\{6, 10\}$. Preslikava g ni injektivna, saj preslika različne elemente definicijskega območja B v isti element zaloge vrednosti ($g(3) = g(5) = g(7) = g(9) = 6$). Preslikava tudi ni surjektivna, saj v zalogi vrednosti ni elementa 2, ki je v množici A. Preslikava g ni ne injektivna in ne surjektivna, zato seveda tudi ni bijektivna.

Preslikava $f \circ g$ slika iz množice B v množico B. Izračunajmo zalogo vrednosti: $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(6) = 5$, $f(g(5)) = f(6) = 5$, $f(g(7)) = f(6) = 5$, $f(g(9)) = f(6) = 5$ in $f(g(13)) = f(10) = 7$. Zaloga vrednosti preslikave $f \circ g$ je množica $\{5, 7\}$. Preslikava $f \circ g$ ni ne injektivna in ne surjektivna.

Podobno določimo še $g \circ f$, ki slika iz množice A v množico A: $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 6$, $g(f(6)) = g(5) = 6$, $g(f(10)) = g(7) = 6$. Zaloga vrednosti preslikave $g \circ f$ je množica $\{6\}$. Tudi preslikava $g \circ f$ ni ne injektivna in ne surjektivna.

Naravna števila Naj bosta m in n naravni števili. Najmanjši skupni večkratnik $v(m, n)$ števil m in n je najmanjše število, ki je deljivo s številoma m in n. Izračunamo ga tako, da pomnožimo vsa praštevila, ki nastopajo v vsaj enem od razcepov teh dveh števil, pri čemer je vsako praštevilo na večjo od potenc, ki se pojavi v razcepu števil. Največji skupni delitelj $D(m, n)$ števil m in n je največje število, ki deli števili m in n. Izračunamo pa ga tako, da pomnožimo vsa praštevila, ki nastopajo hkrati v obeh razcepih števil, vsako praštevilo je na manjšo od potenc, ki se pojavi v razcepu števil.

8. Določi najmanjši skupni večkratnik in največji skupni delitelj dveh števil tako, da števili razcepiš na prafaktorje:

(a) 625 in 75,

(b) 225 in 22.

Rešitev: (a) Razcepimo števili 625 in 75 na prafaktorje:

$$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4, \quad 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2.$$

Torej je

$$v(625, 75) = 3 \cdot 5^4 = 1875, \quad D(625, 75) = 5^2 = 25.$$

(b) Razcepa števil 225 in 22 na prafaktorje sta:

$$225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2, \quad 22 = 2 \cdot 11.$$

Sledi

$$v(225, 22) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 = 4950, \quad D(225, 22) = 1.$$

9. S pomočjo Evklidovega algoritma določi največji skupni delitelj dveh števil:

(a) 625 in 75,

(b) 225 in 22.

Rešitev: (a) Določimo najprej največji skupni delitelj števil 625 in 75:

$$\begin{aligned} 625 &= 8 \cdot 75 + 25 \\ 75 &= 3 \cdot 25 + 0 \end{aligned}$$

Torej je $D(625, 75) = 25$.

(b) Podobno izračunamo tudi največji skupni delitelj števil 225 in 22:

$$\begin{aligned} 225 &= 10 \cdot 22 + 5 \\ 22 &= 4 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Dobili smo, da je $D(225, 22) = 1$, torej sta števili 225 in 22 tuji.

10. Dokaži s popolno indukcijo, da je

$$2 + 7 + 15 + 26 + \cdots + \frac{n(3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

Rešitev: Najprej preverimo, da enakost velja za $n = 1$:

$$2 = \frac{1(1+1)^2}{2}.$$

Privzemimo sedaj, da enakost velja za neko naravno število n. Potem je po indukcijski predpostavki

$$2 + 7 + 15 + 26 + \cdots + \frac{n(3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

Pri tej predpostavki sedaj pokažemo, da velja trditev tudi za število $n+1$

$$\begin{aligned}
&2 + 7 + 15 + 26 + \cdots + \frac{n(3n+1)}{2} + \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n(n+1)+3n+4)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+4n+4)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Indukcijski korak torej velja in zato po popolni indukciji enakost velja za vsako naravno število n.

11. Dokaži s popolno indukcijo, da

$$6 \text{ deli izraz } 7^{n+2} + 3^n - 4$$

za vsako naravno število n.

Rešitev: Najprej preverimo, da trditev velja za $n = 1$:

$$7^{1+2} + 3^1 - 4 = 343 + 3 - 4 = 342.$$

Ali je število 342 deljivo s 6 lahko ugotovimo tako, da preverimo, če je število 342 sodo in če je vsota števk števila 342 deljiva s 3. Potem je število 342 deljivo z 2 in s 3, torej s 6.

Privzemimo sedaj, da trditev velja za neko naravno število n, da torej 6 deli $7^{n+2} + 3^n - 4$. Pokažimo, da pri tej predpostavki trditev velja tudi za $n + 1$. To storimo tako, da izraz za $n + 1$ preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
7^{n+1+2} + 3^{n+1} - 4 =& 7^{n+2} \cdot 7 + 3^n \cdot 3 - 4 \\
=& 7^{n+2}(1 + 6) + 3^n(1 + 2) - 4 \\
=& 7^{n+2} + 3^n - 4 + 7^{n+2} \cdot 6 + 3^n \cdot 2 \\
=& 7^{n+2} + 3^n - 4 + 6(7^{n+2} + 3^{n-1}).
\end{aligned}$$

Ker je po indukcijski predpostavki izraz za n deljiv s 6, je potem izraz za $n + 1$ tudi deljiv s 6.

Dokazali smo še indukcijski korak, zato je po popolni indukciji izraz $7^{n+2} + 3^n - 4$ deljiv s 6 za vsako naravno število n.

Realna števila

12. Določi množico realnih števil, ki zadošča neenakosti

(a) $x - |x| < |x + 5| - 13$

(b) $|x - |x - 1|| \geq x - \frac{1}{3}$

(c) $|x^2 - x| - x \leq 1$

Rešitev: Nalogo rešimo tako, da se znebimo absolutnih vrednosti v neenakosti. Absolutna vrednost spremeni predznak izrazu, ko je ta izraz negativen. Zato pogledamo, kdaj so izrazi znotraj absolutnih vrednosti pozitivni in kdaj negativni. To storimo tako, da izračunamo, kdaj so izrazi enaki nič in nato obravnavamo vse možnosti.

(a) V tem primeru imamo dva izraza znotraj absolutnih vrednosti: x in $x + 5$. Mejni vrednosti sta torej $x = 0$ in $x = -5$ in zato ločimo tri možnosti $x \leq -5$, $-5 < x \leq 0$ in $0 < x$.

Če je $x \leq -5$, potem je $|x| = -x$ in $|x + 5| = -(x + 5)$, neenakost pa je

$$x - (-x) < -(x + 5) - 13$$

$$2x < -x - 18$$

$$3x < -18$$

$$x < -6$$

Dobili smo, da je $x \leq -5$ in hkrati $x < -6$, torej vsak $x < -6$ zadošča neenakosti.

Če je $-5 < x \leq 0$, potem je $|x| = -x$ in $|x+5| = x+5$, neenakost pa je

$$x - (-x) < x + 5 - 13$$

$$2x < x - 8$$

$$x < -8$$

Dobili smo, da je $-5 < x \leq 0$ in hkrati $x < -8$, torej v tem primeru noben x ne zadošča neenakosti.

Če pa je $0 \leq x$. Potem je $|x| = x$ in $|x+5| = x+5$, torej je

$$x - x < x + 5 - 13$$

$$0 < x - 8$$

$$8 < x$$

Dobili smo, da je $0 < x$ in hkrati $8 < x$, torej vsak $x > 8$ zadošča neenakosti. Neenakosti zadoščajo vsa realna števila iz množice

$$(\infty, -6) \cup (8, \infty).$$

(b) Izraz, ki je znotraj dveh absolutnih vrednosti, je $x - 1$ in se mu spremeni predznak, ko je $x = 1$. $|x|x-1|| \geqslant x - \frac{1}{3}$

Naj bo najprej $x \leq 1$. Potem dobimo neenakost

$$|x + (x-1)| \geq x - \frac{1}{3}$$

oziroma

$$|2x - 1| \geq x - \frac{1}{3}$$

V tem primeru moramo obravnavati še dve možnosti. Prvič, ko je $2x - 1 \leq 0$, ko je torej $x \leq \frac{1}{2}$, dobimo

$$-(2x-1) \geq x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3} \geq 3x$$

$$x \leq \frac{4}{9}$$

Zapišimo vse pogoje $x \leq 1$, $x \leq \frac{1}{2}$ in $x \leq \frac{4}{9}$, torej $x \leq \frac{4}{9}$ zadošča neenakosti. Drugič, če je $2x - 1 > 0$, oziroma $x > \frac{1}{2}$, dobimo

$$2x - 1 \geq x - \frac{1}{3}$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Vsi pogoji so $x \leq 1$, $x > \frac{1}{2}$ in $x \geq \frac{2}{3}$, zato $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ zadošča neenakosti.

Če pa je $x > 1$, dobimo

$$|x - (x - 1)| \geq x - \frac{1}{3}$$

$$1 \geq x - \frac{1}{3}$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Združimo oba pogoja $x > 1$ in $x \leq \frac{4}{3}$ in vidimo, da $1 < x \leq \frac{4}{3}$ tudi zadošča neenakosti.

Neenakosti zadoščajo vsa realna števila iz množice

$$\left(-\infty, \frac{4}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

(c) Najprej moramo ugotoviti, za katere vrednosti x je izraz $|x^2 - x|$ večji od nič in za katere vrednosti x je manjši od nič. Če izpostavimo x, potem dobimo, da je $|x^2 - x| = |x||x - 1|$. Zopet pogledamo, kdaj sta izraza x in $x - 1$ pozitivna in kdaj negativna. Mejni vrednosti sta $x = 0$ in $x = 1$. Ločimo tri primere $x \leq 0$, $0 < x \leq 1$ in $1 < x$. Če je $x \leq 0$, je $|x^2 - x| = |x||x - 1| = -x(-x + 1) = x^2 - x$. Tudi, če je $1 < x$, je $|x^2 - x| = |x||x - 1| = x(x - 1) = x^2 - x$. V obeh primerih dobimo

$$x^2 - x - x \leq -1$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$(x - 1)^2 \leq 0$$

Kvadrat nekega števila pa je vedno večji ali enak 0, torej je $x-1=0$ in zato $x=1$, kar pa ni mogoče, saj je $x \leq 0$ ali $x > 1$.

Če pa je $0 < x \leq 1$, je $|x^2 - x| = |x||x-1| = x(-x+1)$ in zato

$$x(-x+1) - x \leq -1$$

$$-x^2 + 1 \leq 0$$

$$1 \leq x^2$$

Ker je hkrati $0 < x \leq 1$ in $1 \leq x^2$, je edina rešitev $x = 1$.

Neenakosti zadošča edino $x = 1$.

13. Reši enačbo

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{1-x}.$$

Rešitev: Enačbo najprej kvadriramo in preuredimo

$$2 - x - 2\sqrt{2-x}\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} = 1 - x$$

$$1 + \frac{x}{2} = 2\sqrt{x - \frac{x^2}{2}}$$

Enačbo še enkrat kvadriramo in dobimo

$$1 + x + \frac{x^2}{4} = 4\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{9x^2}{4} - 3x + 1 = 0$$

Ta kvadratna enačba ima le eno rešitev

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Kompleksna števila Imaginarna enota, ki jo običajno označujemo z i, je število, katerega kvadrat je enak -1. Kompleksno število je oblike

$$z = a + \mathrm{i}b,$$

kjer sta a in b realni števili. Število $a = \mathrm{Re}z$ imenujemo realni del, število $b = \mathrm{Im}z$ pa imaginarni del kompleksnega števila z. Konjugirana vrednost kompleksnega števila z je $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. Absolutna vrednost kompleksnega števila z je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Polarni zapis kompleksnega števila:

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

kjer je φ argument kompleksnega števila z, za katerega velja

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{torej} \ \ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}.$$

Pri računanju argumenta φ moramo biti pozorni v katerem kvadrantu kompleksne ravnine leži kompleksno število z. Če je $a \geq 0$, je $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$. Če pa je $a < 0$, je $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a} + \pi$.

Če hočemo izračunati n-to potenco kompleksnega števila z, ga najprej zapišemo v polarni obliki $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, nato pa izračunamo n-to potenco z s pomočjo Moivrove formule

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

Koren kompleksnega števila z ni enolično določen, saj obstaja n različnih rešitev enačbe $w^n = z$. Tudi pri računanju vseh n vrednosti n-tega korena kompleksnega števila z število z najprej zapišemo v polarni obliki $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, nato pa izračunamo vseh n različnih vrednosti n-tega korena, ki so rešitve enačbe $w^n = z$, s pomočjo formule

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2 \ldots, n-1.$$

Vse rešitve enačbe $w = z^{\frac{p}{q}}$ poiščemo tako, da najprej zapišemo z v polarni obliki $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, nato pa s pomočjo formule

$$w_k = |z|^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p\varphi + 2k\pi}{q} + \mathrm{i}\sin\frac{p\varphi + 2k\pi}{q}\right), \quad k = 0, 1, 2 \ldots, q-1.$$

14. Naj bo $z = a + ib$ kompleksno število, a in b sta realni števili. Določi realni in imaginarni del kompleksnega števila w:

(a) $w = \overline{z} - iz^2$

(b) $w = \frac{1}{\mathrm{i}z} + \frac{1}{\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)+\mathrm{i}|z|}$

Rešitev: (a) Namesto z pišemo $a + ib$ in dobimo

$$\begin{aligned} w &= \overline{a+\mathrm{i}b} - \mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)^2 = a - \mathrm{i}b - \mathrm{i}(a^2 + 2\mathrm{i}ab - b^2) \\ &= a - \mathrm{i}b - \mathrm{i}a^2 + 2ab + \mathrm{i}b^2 = a + 2ab + \mathrm{i}(-b - a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Realni in imaginarni del kompleksnega števila w sta potem

$$\mathrm{Re}w = a + 2ab, \quad \mathrm{Im}w = -b - a^2 + b^2.$$

Še enkrat poudarimo, da je tudi imaginarni del kompleksnega števila realno število.

(b) Kadar imamo kompleksna števila tudi v imenovalcu, moramo ulomek najprej racionalizirati. To storimo tako, da števec in imenovalec pomnožimo s konjugirano vrednostjo imenovalca. Ponovno namesto z pišemo $a + ib$ in dobimo

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)} + \frac{1}{\mathrm{Im}(\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)) + \mathrm{i}|a+\mathrm{i}b|} \\ &= \frac{1}{-b+\mathrm{i}a} + \frac{1}{\mathrm{Im}(-b+\mathrm{i}a) + \mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{-b-\mathrm{i}a}{(-b+\mathrm{i}a)(-b-\mathrm{i}a)} + \frac{a - \mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}{(a+\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2})(a-\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2})} \\ &= \frac{-b-\mathrm{i}a}{b^2+a^2} + \frac{a-\mathrm{i}\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+a^2+b^2} \\ &= \frac{-b}{a^2+b^2} + \frac{a}{2a^2+b^2} + \mathrm{i}\left(\frac{-a}{a^2+b^2} + \frac{-\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2+b^2}\right) \end{aligned}$$

Realni in imaginarni del kompleksnega števila w sta

$$\mathrm{Re}w = \frac{-b}{a^2+b^2} + \frac{a}{2a^2+b^2}, \quad \mathrm{Im}w = \frac{-a}{a^2+b^2} + \frac{-\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2+b^2}.$$

15. Zapiši v polarnem zapisu naslednji kompleksni števili:

    (a) $z_1 = 5\sqrt{3} + 5\mathrm{i}$

    (b) $z_2 = -2 - 2\mathrm{i}$

Rešitev: (a) Če hočemo kompleksno število z zapisati v polarnem zapisu, moramo izračunati njegovo absolutno vrednost $|z|$ in njegov argument φ. Izračunamo:

$$|z_1| = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{25 \cdot 3 + 25} = \sqrt{100} = 10,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ker je $\mathrm{Re} z_1 = 5\sqrt{3} > 0$ in $\mathrm{Im} z_1 = \sqrt{3} > 0$, je z_1 v prvem kvadrantu kompleksne ravnine in zato je

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Polarni zapis prvega kompleksnega števila je potem

$$z_1 = 10(\cos \frac{\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{6}).$$

(b) Podobno izračunamo

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Ker pa je $\mathrm{Re} z_2 = -2 < 0$ in $\mathrm{Im} z_2 = -2 < 0$, je z_2 v tretjem kvadrantu kompleksne ravnine in zato je

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Polarni zapis drugega kompleksnega števila je tako

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

16. Zapiši v kartezičnem zapisu naslednji kompleksni števili:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{in} \quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Rešitev: Da bomo lahko zapisali kompleksni števili v kartezičnem zapisu, moramo samo izračunati vrednosti funkcij sinus in kosinus za dani argument kompleksnega števila. Tako je:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

in

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}(1+\mathrm{i}).$$

17. Poenostavi izraz, nato pa izračunaj še njegovo absolutno vrednost:

$$(1+2\mathrm{i})^2 + \frac{25}{3+4\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) - \mathrm{i}^{207}.$$

Rešitev: Pri računanju izrazov, v katerih nastopajo kompleksna števila, moramo najprej racionalizirati ulomke, to pomeni, da števec in imenovalec ulomka pomnožimo s konjugirano vrednostjo imenovalca in dobimo v imenovalcu realno število. Nadalje bomo upoštevali tudi, da je $\mathrm{i}^4 = 1$. Sledi:

$$\begin{aligned}
&(1+2\mathrm{i})^2 + \frac{25}{3+4\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) - \mathrm{i}^{207} \\
&= 1 + 4\mathrm{i} - 4 + \frac{25(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \mathrm{i}^{4\cdot 51+3} \\
&= -3 + 4\mathrm{i} + \frac{25(3-4\mathrm{i})}{9+16} + \frac{1}{4} - \frac{-3}{4} - \mathrm{i}^3 \qquad \frac{1-3}{4} \quad -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\
&= -3 + 4\mathrm{i} + 3 - 4\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} \\
&= 1 + \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Absolutna vrednost tega kompleksnega števila je

$$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

18. Poenostavi izraz:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{100}.$$

Rešitev: Kompleksno število $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ najprej zapišemo v polarni obliki. Absolutna vrednost je

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1,$$

pri računanju argumenta pa upoštevamo, da je $\mathrm{Re}z<0$ in $\mathrm{Im}z>0$, in zato je

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\pi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

Dobimo, da je

$$z=1\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

nato pa uporabimo Moivrovo formulo

$$\begin{aligned}
z^{100}&=1^{100}\left(\cos\left(100\cdot\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(100\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\
&=\cos\left(41\cdot 2\pi+\frac{8\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(41\cdot 2\pi+\frac{8\pi}{6}\right)\\
&=\cos\frac{8\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{6}=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\\
&=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Pri računanju smo upoštevali, da sta sinus in kosinus periodični funkciji s periodo 2π in je zato $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$ in podobno $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$ za vsako celo število k.

19. Izračunaj:

$$\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

Rešitev: Najprej zapišemo kompleksno število $z = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ v polarni obliki:

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{-2} + \pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3},$$

saj je $\mathrm{Re}z < 0$ in $\mathrm{Im}z > 0$, torej je

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Vse 4 vrednosti četrtega korena kompleksnega števila z izračunamo po formuli

$$w_k = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3,$$

in dobimo

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right), \\
w_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
w_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right), \\
w_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

20. Reši enačbo:

$$z^5 = 1.$$

Rešitev: Iščemo 5 različnih vrednosti petega korena števila 1. Število 1 moramo zapisati v polarni obliki. Seveda je absolutna vrednost števila 1 kar enaka 1. Argument φ vseh pozitivnih realnih števil pa je 0, zato je $1 = 1(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0)$. Formula za izračun petih korenov je tako

$$w_k = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right), \quad k = 0,1,2,3,4,$$

rešitve pa so

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos\frac{0}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{0}{5} = 1,\\
w_1 &= \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5},\\
w_2 &= \cos\frac{4\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5},\\
w_3 &= \cos\frac{6\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5},\\
w_4 &= \cos\frac{8\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}$$

21. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^4 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3.$$

Rešitev: Rešiti moramo enačbo $z = w^{\frac{3}{4}}$, kjer je kompleksno število $w = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$ že zapisano v polarni obliki. Vse rešitve te enačbe potem izračunamo po formuli

$$z_k = 1^{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{3\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3.$$

Rešitve enačbe so:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1, \\ z_1 &= \cos\frac{6\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{4} = -\mathrm{i}, \\ z_2 &= \cos\frac{8\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{4} = 1, \\ z_3 &= \cos\frac{10\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{10\pi}{4} = \mathrm{i}. \end{aligned}$$

22. Reši enačbo:

$$z^2 + 2\mathrm{i}\mathrm{Re}z = |z|.$$

Rešitev: Kompleksno število zapišemo v obliki $z = a + ib$, kjer je a realni in b imaginarni del kompleksnega števila. Sledi

$$\begin{aligned} (a+\mathrm{i}b)^2 + 2\mathrm{i}\cdot a &= \sqrt{a^2+b^2} \\ a^2 + 2\mathrm{i}ab - b^2 + 2\mathrm{i}a &= \sqrt{a^2+b^2} \\ a^2 - b^2 + \mathrm{i}(2ab + 2a) &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Kompleksni števili sta enaki, če imata enaka realna in imaginarna dela. Da bo leva stran zadnje enačbe enaka desni strani, mora biti

$$a^2 - b^2 = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{in} \quad 2ab + 2a = 0.$$

Preoblikujemo drugo enačbo, da dobimo

$$a(b+1) = 0.$$

Produkt dveh števil je enak nič, če je vsaj eden od faktorjev enak nič. Zato je $a = 0$ ali $b = -1$.

Denimo, da je $a = 0$. Vstavimo to v prvo enačbo in dobimo, da je $-b^2 = \sqrt{b^2}$. Leva stran je vedno manjša ali enaka 0, desna stran pa je vedno večja ali enaka nič. Leva stran je potem enaka desni le tedaj, ko je $b = 0$. V tem primeru je rešitev $z = 0$.

Druga možnost je, da je $b = -1$. Vstavimo to v enačbo $a^2 - b^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ in dobimo $a^2 - 1 = \sqrt{a^2+1}$. Enačbo kvadriramo:

$$a^4 - 2a^2 + 1 = a^2 + 1,$$

poenostavimo in izpostavimo a^2:

$$a^2(a^2-3)=0.$$

Torej je $a^2=0$ ali $a^2=3$. Vse možne rešitve za a so tako $a=0$, $a=\sqrt{3}$ in $a=-\sqrt{3}$, preostale rešitve prvotne enačbe za z pa naj bi bile $-\mathrm{i}$, $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ in $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$. Opozorimo, da moramo pri reševanju enačb na koncu dobljene rešitve vstaviti v prvotno enačbo in preveriti, če so res rešitve. V našem primeru $-\mathrm{i}$ ni rešitev, saj $z^2+2\mathrm{i}\mathrm{Re}z=-1\neq 1=|z|$. Število $-\mathrm{i}$ kot možno rešitev enačbe smo dobili zato, ker smo med računanjem enačbo kvadrirali (na primer, enačba $x=-5$ ima seveda eno samo rešitev -5, če pa enačbo kvadriramo, dobimo enačbo $x^2=25$, ki pa ima dve rešitvi 5 in -5, seveda pa 5 ni rešitev prvotne enačbe). Vse rešitve enačbe so

$$z_1=0,\quad z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}\quad \text{in}\quad z_3=-\sqrt{3}-\mathrm{i}.$$

23. Poišči vse rešitve enačbe:

$$|z-\overline{z}|=|\mathrm{i}z|.$$

Rešitev: Kompleksno število zapišemo v obliki $z=a+\mathrm{i}b$, kjer je a realni in b imaginarni del kompleksnega števila z. Če za kompleksni števili v in w velja $|v|=|w|$, potem ne moremo sklepati, da je $v=w$ ali $v=-w$. Zato nalogo rešimo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
|a+\mathrm{i}b-(a-\mathrm{i}b)| &= |\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)|\\
|2\mathrm{i}b| &= |-b+\mathrm{i}a|\\
\sqrt{4b^2} &= \sqrt{b^2+a^2}\\
4b^2 &= b^2+a^2\\
b^2 &= \frac{1}{3}a^2.
\end{aligned}$$

Torej je

$$b=\frac{\sqrt{3}}{3}a\quad \text{ali}\quad b=-\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Vsa kompleksna števila, katerih realni in imaginarni del zadoščata eni od teh enačb, so rešitev prvotne enačbe. To pa so ravno tista kompleksna števila, ki ležijo v kompleksni ravnini na premici $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ali na premici $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

24. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$|z - 3 - 3\mathrm{i}| = 5, \quad z(4 - 3\mathrm{i}) - \overline{z}(4 + 3\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}.$$

Rešitev: V enačbi vstavimo $z = a + ib$ in dobimo:

$$|a + ib - 3 - 3\mathrm{i}| = 5, \quad (a + \mathrm{i}b)(4 - 3\mathrm{i}) - (a - \mathrm{i}b)(4 + 3\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}$$

$$\sqrt{(a-3)^2 + (b-3)^2} = 5, \quad 4a - 3\mathrm{i}a + 4\mathrm{i}b + 3b - 4a - 3\mathrm{i}a + 4\mathrm{i}b - 3b = 6\mathrm{i}$$

$$(a-3)^2 + (b-3)^2 = 25, \quad -6\mathrm{i}a + 8\mathrm{i}b = 6\mathrm{i}$$

Iz desne enačbe dobimo, da je $a = \frac{4}{3}b - 1$. To sedaj vstavimo v levo enačbo

$-6ia = 6i - 8ib$

$a = -1 + \frac{4}{3}b$

$$\left(\frac{4}{3}b - 1 - 3\right)^2 + (b-3)^2 = 25$$

$$\frac{16}{9}b^2 - \frac{32}{3}b + 16 + b^2 - 6b + 9 = 25$$

$$\frac{25}{9}b^2 - \frac{50}{3}b = 0$$

$$b(b-6) = 0$$

Prva rešitev je $b = 0$ in pripadajoči realni del $a = \frac{4}{3}b - 1 = -1$, druga rešitev pa $b = 6$ in $a = \frac{4}{3}b - 1 = 7$.

Rešitvi sistema enačb sta $z = -1$ in $z = 7 + 6\mathrm{i}$.

Poglavje 2

Zaporedja

Zaporedje je množica števil, ki so urejena v določenem vrstnem redu

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Natančneje, zaporedje realnih števil je preslikava, ki vsakemu naravnemu številu n priredi neko realno število a_n.
Zaporedje je naraščajoče, če je vsak naslednji člen večji ali enak od predhodnega: $a_n \leq a_{n+1}$. Zaporedje je strogo naraščajoče, če je $a_n < a_{n+1}$. Zaporedje je padajoče, če je $a_n \geq a_{n+1}$, in je strogo padajoče, če je $a_n > a_{n+1}$.
Če hočemo ugotoviti, ali je zaporedje naraščajoče, potem preverimo, če je $a_{n+1} - a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Če je $a_{n+1} - a_n \leq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje padajoče. Če so členi zaporedja pozitivni, potem lahko ugotovimo, ali je zaporedje naraščajoče ali padajoče, tudi s pomočjo kvocienta zaporednih členov zaporedja. Če je $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje naraščajoče, če pa je $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, potem je zaporedje padajoče. Zaporedje je aritmetično, če je za vsako naravno število n: $a_{n+1} - a_n = d$. Število d imenujemo razlika aritmetičnega zaporedja. Velja $a_n = (n-1)d + a_1$. Zaporedje je geometrijsko, če je $a_{n+1} = a_n q$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število q imenujemo količnik geometrijskega zaporedja. Velja $a_n = a_1 q^{n-1}$.

1. Štirinajsti člen aritmetičnega zaporedja je 14, štirideseti člen pa 16. Izračunaj prvi člen in razliko zaporedja.

   Rešitev: Ker je n-ti člen aritmetičnega zaporedja $a_n = (n-1)d + a_1$, je $a_{14} = 13d + a_1 = 14$ in $a_{40} = 39d + a_1 = 16$. Dobili smo dve enačbi za dve neznanki a_1 in d. Če enačbi odštejemo, dobimo, da je $26d = 2$ in zato je razlika zaporedja $d = \frac{1}{13}$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $13 \cdot \frac{1}{13} + a_1 = 14$, torej je prvi člen zaporedja $a_1 = 13$.

2. Poišči geometrijsko zaporedje zaporedje, če poznaš:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 14, \;\; a_4 + a_5 + a_6 = 112.$$

Rešitev: Ker je n-ti člen geometrijskega zaporedja $a_n = a_1 q^{n-1}$, lahko enačbi zapišemo na naslednji način:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 14, \;\; a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 112.$$

Dobili smo dve enačbi za dve neznanki a_1 in q. V drugi enačbi izpostavimo q^3:

$$q^3(a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 112,$$

izraz v oklepaju pa je po prvi enačbi enak 14. Zato je $q^3 \cdot 14 = 112$, torej je $q^3 = 8$ in $q = 2$. Vstavimo q v prvo enačbo in dobimo

$$a_1 + 2a_1 + 4a_1 = 14,$$

torej je $a_1 = 2$.

3. Dani sta geometrijsko zaporedje $g_1, g_2, g_3, \ldots$ in aritmetično zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Določi obe zaporedji, če veš, da je količnik prvega zaporedja enak razliki drugega in da je $a_2 = 0$, $g_2 = a_4$ ter $g_3 = a_8$.

Rešitev: Vemo, da je n-ti člen geometrijskega zaporedja $g_n = g_1 q^{n-1}$, n-ti člen aritmetičnega zaporedja pa $a_n = (n-1)d + a_1$. Ker je $a_2 = d + a_1 = 0$, je $a_1 = -d$ in zato

$$a_n = (n-1)d - d = (n-2)d.$$

Količnik geometrijskega zaporedja je enak razliki aritmetičnega zaporedja, torej je $q = d$ in $g_n = g_1 d^{n-1}$. Če sedaj vse navedeno upoštevamo pri enačbah $g_2 = a_4$ in $g_3 = a_8$, dobimo

$$g_1 d = 2d \quad \text{in} \quad g_1 d^2 = 6d.$$

Če je $d = 0$, potem dobimo prvo rešitev, pri kateri so vsi členi obeh zaporedij enaki nič. Če pa je $d \neq 0$, potem lahko delimo obe enačbi z d in iz prve dobimo, da je $g_1 = 2$. Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo, da je $2d = 6$ in zato $d = 3$. Pri drugi rešitvi ima geometrijsko zaporedje prvi člen enak $g_1 = 2$, količnik $q = d = 3$, aritmetično zaporedje pa ima prvi člen enak $a_1 = -d = -3$, razlika pa je $d = 3$.

4. Kaj lahko poveš o naraščanju ali padanju zaporedja

$$a_n = \frac{n+5}{n}$$

in o njegovih zgornjih ali spodnjih mejah? Izračunaj limito, če obstaja, sicer pa poišči vsa stekališča.

Rešitev: Ker je

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)+5}{n+1} - \frac{n+5}{n} = \frac{(n+6)n-(n+5)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2+6n-n^2-6n-5}{n(n+1)} = \frac{-5}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

za vsako naravno število n, je zaporedje strogo padajoče. Največji člen zaporedja je potem prvi člen $a_1 = \frac{1+5}{1} = 6$. Natančna zgornja meja zaporedja je zato 6. Vsi členi zaporedja so pozitivni, zato je 0 spodnja meja zaporedja. Če pa zapišemo

$$a_n = \frac{n+5}{n} = 1 + \frac{5}{n},$$

vidimo, da so vsi členi zaporedja večji od 1. Torej je 1 tudi spodnja meja zaporedja. Ker pa je z naraščajočim n ulomek $\frac{5}{n}$ poljubno majhen, so členi a_n za dovolj velik n poljubno blizu 1. Torej ni nobeno število, ki je večje od 1, spodnja meja zaporedja. To pa pomeni, da je 1 natančna spodnja meja zaporedja. Zaporedje je padajoče in omejeno navzdol, zato ima limito, ki je enaka natančni spodnji meji:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right) = 1.$$

5. Ali je zaporedje

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

naraščajoče ali padajoče? Izračunaj največji člen zaporedja, če obstaja. Določi limito, če obstaja, in stekališča danega zaporedja.

Rešitev: Preverimo najprej, če je zaporedje naraščajoče ali padajoče:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (-1)^{n+1} + \frac{1}{n+1} - (-1)^n - \frac{1}{n} \\ &= (-1)^{n+1} + (-1)(-1)^n + \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} \\ &= 2(-1)^{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Prvi člen razlike je 2 ali -2, drugi člen pa je vedno manjši od $\frac{1}{2}$, zato je razlika dveh zaporednih členov zaporedja $a_{n+1} - a_n$ izmenično pozitivna in negativna. Torej zaporedje ni ne naraščajoče in ne padajoče. Če pogledamo samo sode člene zaporedja, potem vidimo, da je $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ za sode n. Za lihe n pa je $a_n = -1 + \frac{1}{n}$. Z naraščajočim n je ulomek $\frac{1}{n}$ vedno manjši, zato so sodi členi vedno manjši, največji je potem prvi sodi člen $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Tudi lihi členi so z naraščajočim n vedno manjši, največji lihi člen je potem $a_1 = -1 + 1 = 0$. Torej je največji člen zaporedja $a_2 = \frac{3}{2}$. Ko gre n proti neskončno, gre izraz $\frac{1}{n}$ proti nič, zato se sodi členi približujejo 1, lihi pa -1. Zaporedje ima dve stekališči 1 in -1 in zato nima limite.

6. Ugotovi, od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n^2 + n - 2}{n^2 + 2n + 1}$$

razlikujejo od limite za manj kot $\frac{1}{10}$.

Rešitev: Izračunajmo najprej limito zaporedja

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + n - 2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2})}{n^2(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 3. \end{aligned}$$

Izračunati moramo še, od katerega naravnega števila n dalje so vsi členi a_n razlikujejo od limite 3 za manj kot $\frac{1}{10}$, torej

$$|a_n - 3| < \frac{1}{10}.$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
|a_n - 3| &= \left|\frac{3n^2+n-2}{n^2+2n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n^2+n-2-3n^2-6n-3}{n^2+2n+1}\right| \\
&= \left|\frac{-5n-5}{(n+1)^2}\right| = \left|\frac{-5(n+1)}{(n+1)^2}\right| = \left|\frac{-5}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1}
\end{aligned}
$$

Izračunati moramo, za kateri n je

$$|a_n - 3| = \frac{5}{n+1} < \frac{1}{10}.$$

Sledi, da mora biti $50 < n+1$ oziroma $n > 49$. Od petdesetega člena se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\frac{1}{10}$.

7. Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}}.$$

Rešitev: V imenovalcu in števcu ulomka izpostavimo največjo potenco n, nato ulomek okrajšamo in dobimo

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2 \cdot \frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

8. Izračunaj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+3} - n}.$$

Rešitev: V imenovalcu ulomka imamo nedoločen izraz oblike neskončno minus neskončno, zato števec in imenovalec ulomka pomnožimo z izarzom

$\sqrt{n^2+3}+n$. Potem pa lahko izračunamo limito:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+3}-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(n^2+3\right)}+1}{n^2+3-n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{3} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

9. Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n}.$$

Rešitev: Ker je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e,$$

je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-2}{n+2}\right)^{3n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{-\frac{n+2}{2}\cdot\left(-\frac{2\cdot 3n}{n+2}\right)} \\
&= e^{-6},
\end{aligned}$$

saj je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot 3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n\cdot 6}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-6}{1+\frac{2}{n}} = -6.$$

10. Izračunaj limito rekurzivno podanega zaporedja

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{3}{a_{n-1}}\right), \quad a_1 = 2.$$

Rešitev: Najprej preverimo, da limita rekurzivno podanega zaporedja res obstaja. Pokazali bomo, da je zaporedje padajoče in omejeno, vsako tako zaporedje pa je konvergentno in zato ima limito.

Če je a_{n-1} pozitivno število, je seveda tudi $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right)$ pozitivno število. In ker je prvi člen zaporedja $a_1 = 2$ pozitiven, so potem tudi vsi nadaljnji členi pozitivni. Torej so vsi členi večji od nič in je zato zaporedje omejeno navzdol s konstanto 0. Poiščemo lahko še boljšo oceno. Enakost

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right)$$

pomnožimo z $2a_{n-1}$ in dobimo

$$2a_n a_{n-1} = a_{n-1}^2 + 3$$

Na obeh straneh nato prištejemo a_n^2 in preuredimo

$$a_n^2 - 3 = a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-1} + a_n^2$$

$$a_n^2 - 3 = (a_{n-1} - a_n)^2$$

Desna stran enakosti je vedno večja ali enaka nič, zato je

$$a_n^2 - 3 \geq 0$$

oziroma $a_n^2 \geq 3$. Ker pa so vsi členi zaporedja pozitivni, velja, da je $a_n \geq \sqrt{3}$.

Preverimo še, da je zaporedje padajoče, da je torej $a_n < a_{n-1}$. Izračunamo

$$a_{n-1} - a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right) = \frac{2a_{n-1}^2 - a_{n-1}^2 - 3}{2a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}^2 - 3}{2a_{n-1}}.$$

Ker je $a_{n-1}^2 \geq 3$ in so vsi členi zaporedja pozitivni, je

$$a_{n-1} - a_n \geq 0$$

in zaporedje je padajoče. Torej ima limito. Limito zaporedja izračunamo tako, da v rekurzivno formulo namesto členov a_n in a_{n-1} vstavimo x in rešimo enačbo

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

$$2x^2 = x^2 + 3$$

$$x^2 = 3$$

in dobimo rešitvi $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, $-\sqrt{3}$ ne more biti limita zaporedja, torej je limita zaporedja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}.$$

Poglavje 3

Vrste

Potreben pogoj za konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

je konvergentna za $\alpha > 1$ in je divergentna za $\alpha \leq 1$. Kriteriji za ugotavljanje konvergence številske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s pozitivnimi členi so:

1. Kvocientni kriterij: Če je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

   in je $L < 1$, potem je številska vrsta konvergentna, če pa je $L > 1$, potem je številska vrsta divergentna. V primeru, ko je $L = 1$, je lahko vrsta konvergentna ali divergentna.

2. Korenski kriterij: Če je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

   in je $L < 1$, potem je številska vrsta konvergentna, če pa je $L > 1$, potem je številska vrsta divergentna. V primeru, ko je $L = 1$, je lahko vrsta konvergentna ali divergentna.

3. Primerjalni kriterij: Naj bosta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

številski vrsti in naj bo

$$a_n \leq b_n \quad \text{za vsak} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, potem je konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Če pa je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, potem je divergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Omenimo še Leibnitzev kriterij za ugotavljanje konvergence alternirajoče vrste: Če je $\{a_n\}$ padajoče zaporedje pozitivnih števil in je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem je alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergentna.
Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutno konvergentna, če je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna. Če je vrsta konvergentna, ni pa absolutno konvergentna, potem pravimo, da je pogojno konvergentna.
Če je $0 \leq q < 1$, potem je vsota potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

1. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{4}{3}}}$$

konvergentna?

Rešitev: Ker je $\frac{4}{3} > 1$, je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

konvergentna. Če imenovalec ulomka zmanjšamo, se ulomek poveča, torej je

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{4}{3}}} < \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$ in zato

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{4}{3}}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Po primerjalnem kriteriju potem konvergira tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{4}{3}}}.$$

2. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n+1}$$

konvergentna?

Rešitev: Ponovno bomo uporabili primerjalni kriterij. V števcu splošnega člena a_n je največja potenca n, v imenovalcu pa n^2. Od tod lahko sklepamo, da je vrsta podobna harmonični vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ki je divergentna. Domnevamo torej, da je naša vrsta divergentna, kar bomo pokazali tako, da jo bomo primerjali s harmonično vrsto. Ker za vsako naravno število n velja $n^2+n+1 \leq n^2+n^2+n^2 = 3n^2$, ulomek pa se zmanjša, če povečamo imenovalec, je

$$\frac{2n}{n^2+n+1} \geq \frac{2n}{3n^2} = \frac{2}{3n}.$$

Ker je harmonična vrsta divergentna, je divergentna tudi vrsta $\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ in zato po primerjalnem kriteriju divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n+1}$.

3. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{2n^2-7}$$

konvergentna?

Rešitev: Tako v števcu kot tudi v imenovalcu splošnega člena a_n je največja potenca n^2. Torej lahko sklepamo, da splošni člen z naraščajočim n ne bo konvergiral proti 0. Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{2n^2-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-7\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{7}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Torej limita splošnega člena ni enaka 0, kar je potreben pogoj za konvergenco številske vrste. Ker potreben pogoj ni izpolnjen, vrsta ne konvergira, temveč divergira.

4. Ali vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan \frac{1}{n}}{n^2+1}$$
konvergira? Ali konvergira absolutno?

Rešitev: Z naraščajočim n vrednost $\arctan \frac{1}{n}$ pada proti 0, saj je $\arctan x$ monotona funkcija in je $\arctan 0 = 0$. Seveda tudi $\frac{1}{n^2+1}$ pada proti 0, zato splošni členi po absolutni vrednosti z naraščajočim n padajo proti 0. Ker je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n^2+1} = 0$$
in je vrsta alternirajoča, po Leibnitzevem kriteriju vrsta konvergira.

Preverimo še, če je vrsta tudi absolutno konvergentna. Tokrat bomo uporabili primerjalni kriterij. Upoštevamo, da je $\arctan x$ omejena funkcija, katere natančna zgornja meja je $\frac{\pi}{2}$, zato je
$$\left| \frac{(-1)^n \arctan \frac{1}{n}}{n^2+1} \right| = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n^2+1} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2+1} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$$
in
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \arctan \frac{1}{n}}{n^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Vrsta na desni strani neenakosti je konvergentna, saj je eksponent $\alpha = 2 > 1$, potem pa je konvergentna tudi vrsta na levi. Sledi, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan \frac{1}{n}}{n^2+1}$ absolutno konvergentna.

Omenimo, da je vsaka absolutno konvergentna vrsta tudi konvergentna, zato bi v tem primeru zadoščalo, da bi pokazali, da je vrsta absolutno konvergentna, od tod pa že sledi, da je tudi konvergentna.

5. Ali vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n-1)^2}$$
konvergira? Ali konvergira absolutno?

Rešitev: Opazimo, da je vrsta alternirajoča in da členi po absolutni vrednosti padajo proti nič. Konvergenco vrste bomo zato ugotavljali s pomočjo Leibnitzevega kriterija. Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n-4+\frac{1}{n}}=0.$$

Ker je limita splošnega člena enaka nič, je alternirajoča vrsta po Leibnitzevem kriteriju konvergentna.

Preverimo še, ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n-1)^2}$ absolutno konvergentna, če je torej konvergentna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-4n+1}.$$

V števcu splošnega člena je največja potenca n, v imenovalcu pa n^2. Zato je vrsta podobna harmonični vrsti $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ki je divergentna. Ocenimo

$$4n^2-4n+1<4n^2,$$

zato je

$$\frac{n}{4n^2-4n+1}>\frac{n}{4n^2}=\frac{1}{4n}$$

in

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2}>\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Ker je harmonična vrsta divergentna, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2}$ divergentna. Konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n-1)^2}$ torej ni absolutno konvergentna, zato je pogojno konvergentna.

6. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\mathrm{e}^n}$$

konvergentna?

Rešitev: Pri ugotavljanju konvergence bomo uporabili kvocientni kriterij. Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{\mathrm{e}^{n+1}}}{\frac{n!}{\mathrm{e}^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n(n+1)!}{n!\mathrm{e}^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\mathrm{e}}=\infty.$$

Po kvocientnem kriteriju sledi, da je vrsta divergentna.

7. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{5^n}}$$

konvergentna?

Rešitev: Pri ugotavljanju konvergence si bomo pomagali s kvocientnim kriterijem. Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)+2}{\sqrt{5^{n+1}}}}{\frac{3n+2}{\sqrt{5^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)\sqrt{5^n}}{(3n+2)\sqrt{5^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{(3n+2)\sqrt{5}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(3\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{3\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.$$

Po kvocientnem kriteriju je vrsta konvergentna.

8. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}}$$

konvergentna?

Rešitev: Pri ugotavljanju konvergence bomo uporabili korenski kriterij. Izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1.$$

Po korenskem kriteriju vrsta konvergira.

9. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{3n+1}$$

konvergentna?

Rešitev: Konvergenco vrste bomo ugotovili s pomočjo korenskega kriterija. Izračunamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{3n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^{3+\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} < 1.\end{aligned}$$

Po korenskem kriteriju je vrsta konvergentna.

10. Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{7\cdot 4^n}.$$

Rešitev: Izpostavimo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{7\cdot 4^n} = \frac{3}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$$

in vidimo, da moramo izračunati vsoto potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{7\cdot 4^n} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{7}.$$

11. Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}.$$

Rešitev: Zapišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 2^n}{\frac{1}{3}\cdot 3^n} = 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

in vidimo, da moramo izračunati vsoto potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2.$$

Torcj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = 6 \cdot 2 = 12.$$

Poglavje 4

Funkcije

Nekaj definicij:

Realna *funkcija* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je D_f podmnožica realnih števil $\mathbb{R}$, je predpis, ki vsakemu elementu x iz množice D_f priredi natanko en element iz množice realnih števil. Množica D_f se imenuje *definicijsko območje* funkcije $f(x)$. Množica vseh tistih realnih števil, ki so slike elementov definicijskega območja, pa se imenuje *zaloga vrednosti* funkcije $f(x)$. Označimo jo z Z_f.

Sodost in lihost funkcije:
- funkcija $f(x)$ je *liha*, če velja $f(-x) = -f(x)$,
- ter *soda*, če velja $f(-x) = f(x)$,

za vsak x iz njenega definijskega območja D_f. Graf sode funkcije je simetričen glede na y-os, graf lihe funkcije pa glede na izhodišče $T(0,0)$. Primeri lihih funkcij: $\sin x$, vse lihe potence spremenljivke x (x^1, x^3, x^5, $\dots$). Primeri sodih funkcij: $\cos x$, vse sode potence spremenljivke x (x^2, x^4, x^6, $\dots$).

Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost funkcije:
- funkcija $f : A \to B$ je *injektivna*, če za vsaka $x_1, x_2 \in A$ velja: če $x_1 \neq x_2$, tedaj je tudi $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- funkcija $f : A \to B$ je *surjektivna*, če je $Z_f = B$,
- funkcija $f : A \to B$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna hkrati.

1. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Rešitev: Koren, ki nastopa v funkciji $f(x)$, je definiran tam, kjer je izraz pod korenom nenegativen:

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

Izraz na levi strani neenačbe je kvadratna funkcija, ki predstavlja navzgor obrnjeno parabolo z ničlama $x_1 = -2$ in $x_2 = 2$. Vrednosti na tej paraboli so večje od nič za $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. To je torej tudi definicijsko območje funkcije $f(x)$: $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

2. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x}\right)$.

Rešitev: Da bo ulomek v argumentu funkcije arkussinus definiran, mora biti njegov imenovalec različen od 0. Ulomek je torej definiran na območju $R_0 = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Argument funkcije arkussinus mora zavzeti vrednosti med -1 in 1. Iz tega dobimo naslednji dve neenačbi:

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$$

Vsako neenačbo rešimo posebej. Prva neenačba se glasi:

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x}$$

$$\frac{2x}{1+x} + 1 \geq 0$$

Na obeh straneh jo pomnožimo z $(1+x)^2$, kar lahko brez težav naredimo, saj je izraz $(1+x)^2$ vedno večji od nič (razen za $x = -1$, kjer pa ulomek v argumentu funkcije tako ali tako ni definiran), zato se nam znak $\geq$ ohrani:

$$2x(1+x) + (1+x)^2 \geq 0$$

$$3x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

$$(3x+1)(x+1) \geq 0$$

Na desni strani dobimo navzgor obrnjeno kvadratno parabolo z ničlama $x_1 = -1$ ter $x_2 = -\frac{1}{3}$, ki zavzame pozitivne vrednosti v zunanjosti intervala med obema ničlama. Rešitev te neenačbe je: $R_1 = (-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, \infty)$.

Druga neenačba se glasi:

$$\frac{2x}{1+x} \leq 1$$

$$\frac{2x}{1+x} - 1 \leq 0$$

Kot že pri prvi neenačbi lahko tudi tukaj pomnožimo obe strani z izrazom $(1+x)^2$:

$$2x(1+x) - (1+x)^2 \leq 0$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

$$(x-1)(x+1) \leq 0$$

Izraz na desni strani te neenačbe predstavlja navzgor obrnjeno parabolo z ničlama $x_1 = -1$ ter $x_2 = 1$. Vrednosti na paraboli so negativne med ničlama, kar nam da rešitev $R_2 = [-1, 1]$.

Za obstoj funkcije $f(x)$ morata biti izpolnjeni obe neenačbi, pa še imenovalec ulomka v argumentu ne sme biti enak nič, zato velja:

$$D_f = R_0 \cap R_1 \cap R_2 = (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \cap \Big((-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, \infty)\Big) \cap [-1, 1]$$
$$= [-\frac{1}{3}, 1].$$

3. Določi definicijsko območje funkcij $f(x) = e^{\ln x}$ ter $g(x) = \ln(e^x)$.

Rešitev: Eksponentna funkcija e^x je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$, naravni logaritem $\ln x$ pa za $x \in (0, \infty) = \mathbb{R}^+$. Zato je definicijsko območje funkcije $f(x)$ enako $D_f = \mathbb{R}^+$, da $\ln x$ sploh obstaja. Po drugi strani pa je $D_g = \mathbb{R}$, ker je e^x, ki je argument logaritma v funkciji $g(x)$, vedno strogo večji od 0 in je torej zunanji logaritem definiran za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln(|x+2| - |x-3| + 3)$.

Rešitev: Zapišemo neenačbo, ki jo dobimo iz pogoja, da je logaritem definiran samo za pozitivne argumente:

$$|x+2| - |x-3| + 3 > 0$$

Ker imamo v tej neenačbi pod absolutno vrednostjo dva različna izraza, bomo morali ločiti štiri primere:

1. primer: $x + 2 \geq 0$ in $x - 3 \geq 0$.
Območje v tem primeru je dano kot presek danih dveh pogojev (to je $x \geq -2$ in $x \geq 3$), kar nam da območje, definirano z neenačbo $x \geq 3$. Neenačba se v tem primeru glasi:

$$(x+2) - (x-3) + 3 > 0$$

$$8 > 0$$

To je res za vsako realno število x, se pravi, da je rešitev tega primera kar celotno območje, za katerega je primer definiran: $R_1 = [3, \infty)$.

2. primer: $x + 2 \geq 0$ in $x - 3 < 0$.
Območje v tem primeru je $-2 \leq x < 3$. Neenačba je sedaj malo drugačna (spremenil se bo predznak pri $|x-3|$, saj je $|x-3| = -(x-3)$, če je $x - 3 < 0$):

$$(x+2) - (-(x-3)) + 3 > 0$$

$$2x + 2 > 0$$

$$x > -1$$

To rešitev sedaj primerjamo z območjem, ki smo ga določili iz pogojev drugega primera: hkrati mora veljati $-2 \leq x < 3$ ter $x > -1$, kar nam da rešitev: $R_2 = (-1, 3)$.

3. primer: $x + 2 < 0$ in $x - 3 \geq 0$.
Presek teh dveh pogojev je prazna množica, se pravi, da ta primer sploh ni možen.

4. primer: $x + 2 < 0$ in $x - 3 < 0$.
Presek teh dveh pogojev nam da območje $x < -2$. Neenačba se glasi:

$$-(x+2) - (-(x-3)) + 3 > 0$$

$$-2 > 0$$

To seveda ni res, zato dobljena neenačba torej v tem primeru nima rešitve: $R_4 = \emptyset$.

Rešitve vseh štirih posameznih primerov sestavimo v skupno rešitev neenačbe:

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_4 = [3, \infty) \cup (-1, 3) \cup \emptyset = (-1, \infty).$$

Ker je funkcija $f(x)$ definirana za vsak x, ki reši neenačbo, je dobljena rešitev tudi definicijsko območje funkcije $f(x)$: $D_f = (-1, \infty)$.

5. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$.

Rešitev: Funkcija je definirana povsod, razen pri $x = 0$, ko bi morali v argumentu kosinusa deliti z nič. Velja torej: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Ko x preteče množico $\mathbb{R} - \{0\}$, tudi $\frac{1}{x}$ preteče to isto množico $\mathbb{R} - \{0\}$, kar pomeni, da $\cos(\frac{1}{x})$ preteče vsa števila v zalogi vrednosti funkcije kosinus (kar so vsa števila med -1 in 1). Zato je $Z_f = [-1, 1]$.

6. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = e^{x^2+1}$.

Rešitev: Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R}$, saj za nobeno realno število x nimamo težav z definicijo eksponentne funkcije. Če $x \in \mathbb{R}$, je tedaj $x^2 + 1 \in [1, \infty)$, oziroma $e^{x^2+1} \in [e, \infty)$, ker je eksponentna funkcija naraščajoča. Torej je zaloga vrednosti te funkcije $Z_f = [e, \infty)$.

7. Preveri injektivnost, surjektivnost ter bijektivnost funkcij $f(x)$, $g(x)$ ter $h(x)$ z definicijskim območjem in zalogo vrednosti v množici realnih števil. Funkcije so dane z naslednjimi predpisi:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = x^3.$$

Rešitev: Poglejmo si funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Če vzamemo dve različni realni števili, $x_1 \neq x_2$, tedaj je tudi $e^{x_1} \neq e^{x_2}$. To pomeni, da je $f(x)$ injektivna. Zaloga vrednosti eksponentne funkcije je $D_f = (0, \infty) \neq \mathbb{R}$, zato $f(x)$ kot funkcija z definicijskim območjem in zalogo vrednosti v množici realnih števil ni surjektivna in tudi ne bijektivna.

Naslednja funkcija, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$, ni injektivna, ker lahko zlahka najdemo več različnih realnih števil, ki jih sinus preslika v isto vrednost. Na primer:

$$g(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = g\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija $g(x)$ ravno tako ni surjektivna, saj je njena zaloga vrednosti $Z_g = [-1, 1]$, kar ni enako množici vseh realnih števil $\mathbb{R}$, v katero po definiciji slika.

Oglejmo si še zadnjo funkcijo, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$. Za vsaki dve različni realni števili $x_1 \neq x_2$ velja:

$$h(x_1) = x_1^3 \neq x_2^3 = h(x_2),$$

zato je funkcija $h(x)$ injektivna. Velja tudi $Z_h = \mathbb{R}$, zato je $h(x)$ surjektivna. Ker je tako injektivna kot surjektivna, je tudi bijektivna.

8. Preveri, ali je dana funkcija $f(x)$ soda ali liha?

   a) $f(x) = \frac{\cos x}{x^4 + x^2}$,

   b) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

   c) $f(x) = \cos x + \sin x$.

   Rešitev:

   a) $f(x) = \frac{\cos x}{x^4 + x^2}$.

   Da bi preverili sodost oziroma lihost funkcije, moramo izračunati vrednost funkcije v točki $-x$, se pravi $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^4 + (-x)^2} = \frac{\cos x}{x^4 + x^2} = f(x).$$

   Funkcija $f(x)$ je soda.

   b) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

   Tokrat dobimo:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -f(x).$$

   Ta funkcija je liha.

   c) $f(x) = \cos x + \sin x$.

   Tokrat dobimo:

$$f(-x) = \cos(-x) + \sin(-x) = \cos x - \sin x.$$

   Ta funkcija ni niti liha niti soda.

9. Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ danih funkcij $f(x)$ ter $g(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = x^2$,

b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$,

c) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$,

d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

Rešitev: Pri računanju kompozituma dveh funkcij izraz, določen z notranjo funkcijo, vstavimo kot argument v zunanjo funkcijo.

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = x^2$.

$$f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$g(f(x)) = g(\frac{1}{1+x}) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(\frac{1+x}{1-x}) = 1 + \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{(1+x)+(1-x)}{1+x} \\ &= \frac{2}{1+x}. \\ g(f(x)) &= g(1+\frac{1}{x}) = \frac{1+(1+\frac{1}{x})}{1-(1+\frac{1}{x})} = \frac{2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2x+1. \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$.

$$f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^3 x.$$

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin x^3.$$

d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

$$f(g(x)) = f(\sqrt{\frac{1-x}{x}}) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x+(1-x)}{x}} = x.$$

$$g(f(x)) = g(\frac{1}{1+x^2}) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = \sqrt{x^2}$$

$$= |x|.$$

10. Določi kompozitume $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$ in $g(g(x))$ za dani funkciji $f(x)$ ter $g(x)$.
a) $f(x) = -2x+1$, $g(x) = 3x-2$,
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Rešitev:

a) $f(x) = -2x+1$, $g(x) = 3x-2$.

$$f(f(x)) = f(-2x+1) = -2(-2x+1)+1 = 4x-1.$$

$$f(g(x)) = f(3x-2) = -2(3x-2)+1 = -6x+5.$$

$$g(f(x)) = g(-2x+1) = 3(-2x+1)-2 = -6x+1.$$

$$g(g(x)) = g(3x-2) = 3(3x-2)-2 = 9x-8.$$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

$$f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4.$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

$$g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}.$$

11. Poišči inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$ k dani funkciji $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{3x+4}{x-3}$,

b) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + 3$.

Rešitev:

a) Inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$dobimo tako, da iz danega izraza $y = f(x)$ izračunamo $x = f^{-1}(y)$ in nato zamenjamo spremenljivki x in y:

$$y = \frac{3x+4}{x-3}$$

$$y(x-3) = 3x+4$$

$$yx - 3y = 3x + 4$$

$$yx - 3x = 3y + 4$$

$$x(y-3) = 3y + 4$$

$$x = \frac{3y+4}{y-3} = f^{-1}(y)$$

Dobimo:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x-3}.$$

b) Ponovimo postopek iz točke a) - iz dane funkcije $y = f(x)$ izračunamo x:

$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

$$y - 3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{tg}(y-3)$$

$$x = 2\operatorname{tg}(y-3) = f^{-1}(y)$$

Dobimo:

$$f^{-1}(x) = 2\operatorname{tg}(x-3).$$

12. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3}.$$

Rešitev: Limito kvocienta dveh polinomov rešimo tako, da števec in imenovalec ulomka delimo z največjo potenco spremenljivke x, ki nastopa v danem izrazu. V našem primeru je to x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2 - 3x + 1) \,/ : x^2}{(x^2 + 3) \,/ : x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}}.$$

Ko gre x proti ∞, gredo vsi členi oblike $\frac{1}{x^n}$ (za $n > 0$), ki jih dobimo po opravljenem deljenju, proti nič. Dobimo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{5 - 0 + 0}{1 + 0} = 5.$$

13. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x-2}.$$

Rešitev: Izraz pod limito si predstavljamo kot ulomek, ki ga nato racionaliziramo tako, da ga zgoraj in spodaj pomnožimo z vsoto ustreznih korenov:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x-2}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\cdot\sqrt{x-2}\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{((\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2)\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2-x)\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}.$$

Sedaj števec in imenovalec ulomka delimo z največjo potenco spremenljivke x, ki nastopa v izrazu, kar je v našem primeru $\sqrt{x}$. Upoštevamo še dejstvo, ki smo ga navedli pri prejšnji limiti, da gredo namreč, ko gre x proti ∞, vsi členi oblike $\frac{1}{x^n}$ (za $n > 0$) proti nič. S pomočjo tega dejstva lahko limito izračunamo do konca:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\cdot\sqrt{x-2})\,/:\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})\,/:\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{\frac{x-2}{x}}}{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1}} = 1.$$

14. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x+1}+5^{x+1}}{3^x+5^x}.$$

Rešitev: Če v limiti nastopa kvocient eksponentnih funkcij namesto kvocienta polinomov, števec in imenovalec ulomka delimo z največjo osnovo na največjo potenco, ki še nastopa v izrazu. V našem primeru je največja osnova 5, njena največja potenca v izrazu pa je $x+1$, se pravi, da bomo ulomek zgoraj in spodaj delili s 5^{x+1}:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3^{x+1}+5^{x+1})\,/:5^{x+1}}{(3^x+5^x)\,/:5^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3^{x+1}}{5^{x+1}}+\frac{5^{x+1}}{5^{x+1}}}{\frac{3^x}{5^{x+1}}+\frac{5^x}{5^{x+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{3}{5})^{x+1}+1}{\frac{1}{5}\cdot(\frac{3}{5})^x+\frac{1}{5}}.$$

Eksponentni funkciji, ki nastopata v tako dobljenem izrazu, imata obe osnovo manjšo od 1 (osnova je namreč pri obeh enaka $\frac{3}{5}$). To pa pomeni, da je njuna limita, ko gre x proti ∞, enaka nič.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{3}{5})^{x+1}+1}{\frac{1}{5}\cdot(\frac{3}{5})^x+\frac{1}{5}} = \frac{0+1}{\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}} = 5.$$

15. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x.$$

Rešitev: Pri računanju dane limite bomo uporabili znano formulo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Najprej zdelimo polinoma v izrazu pod limito:

$$\begin{array}{rcl} (x+3) & : & (x+2) = 1+\frac{1}{x+2} \\ -(x+2) & & \\ \hline 1 & & \end{array}$$

Kvocient je $k(x) = 1$, ostanek pa $o(x) = 1$. Ulomek v limiti lahko zapišemo kot $k(x)+\frac{o(x)}{x+2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^x.$$

Vpeljemo novo spremenljivko: $y = x+2$ oziroma $x = y-2$. Ko gre x proti ∞, gre tudi y proti ∞. Dobimo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y-2}.$$

Sedaj razdelimo eksponent $y-2$ na dva dela, od katerih v enem nastopa spremenljivka y, drugi del pa je samo številski. Limita prvega faktorja v dobljenem produktu je po na začetku omenjeni formuli enaka številu e, limita drugega faktorja pa je 1 (saj gre $\frac{1}{y}$ proti nič, ko gre y proti ∞):

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y-2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2} = e\cdot(1+0)^{-2} = e.$$

16. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}.$$

Rešitev: V tem primeru uporabimo naslednjo znano formulo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Najprej pa ustrezno razširimo ulomek v naši limiti tako, da ga zgoraj in spodaj pomnožimo s 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

17. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

Rešitev: Spet uporabimo formulo iz prejšnje naloge:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Razširimo ulomek v naši limiti, tako da ga zgoraj in spodaj pomnožimo z ax in bx ter ustrezno pregrupiramo produkte. To nam omogoča uporabo zgoraj navedene formule:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)\cdot ax\cdot bx}{(\sin bx)\cdot ax\cdot bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{ax}{bx}\\&=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}\cdot 1\cdot 1=\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

18. Izračunaj limito:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x+7}-4}{\sqrt{x}-3}.$$

Rešitev: Če v izraz pod limito vstavimo $x = 9$, dobimo $\frac{0}{0}$, kar je lahko karkoli. Zato ulomek pod limito racionaliziramo ter se znebimo motečega člena $x - 9$. Nato lahko brez težav izračunamo vrednost limite tako, da vanjo vstavimo $x = 9$:

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x+7}-4}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x+7}-4)\cdot(\sqrt{x+7}+4)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x+7}+4)\cdot(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{((\sqrt{x+7})^2-4^2)\cdot(\sqrt{x}+3)}{((\sqrt{x})^2-3^2)\cdot(\sqrt{x+7}+4)} = \lim_{x\to 9} \frac{(x+7-16)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x+7}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x+7}+4)} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+7}+4} = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{9+7}+4}$$

$$= \frac{3+3}{4+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

19. V točkah, kjer funkcija $f(x)$ spremeni predpis, izračunaj levo in desno limito, če obstajata. Ali je funkcija $f(x)$ v teh dveh točkah zvezna?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & ; \quad x < -1 \\ \frac{x+3}{2} & ; \quad -1 \le x < 1 \\ x^2+1 & ; \quad x \ge 1 \end{cases}.$$

Rešitev: Levo in desno limito izračunamo pri $x = 1$ ter $x = -1$.

1. primer: $x = 1$

Desna limita:

$$\lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1}(x^2+1) = (1^2+1) = 2.$$

Leva limita:

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1}\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Ker sta ti dve limiti enaki, je funkcija $f(x)$ pri $x = 1$ zvezna.

2. primer: $x = -1$

Desna limita:

$$\lim_{x\searrow -1} f(x) = \lim_{x\searrow -1}\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Leva limita:

$$\lim_{x\nearrow -1} f(x) = \lim_{x\nearrow -1} (-x^2+1) = -(-1)^2+1 = 0.$$

Vrednosti limit sta različni, zato funkcija $f(x)$ pri $x=-1$ ni zvezna.

20. Določi konstanto a tako, da bo funkcija $f(x)$ povsod zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & ; \quad x>0 \\ a(-x^2+1) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Rešitev: $f(x)$ je zvezna povsod, razen morda pri $x=0$, kjer se spremeni predpis. V tej točki izračunamo levo in desno limito:

Leva limita:

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} a(-x^2+1) = a.$$

Desna limita:

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right) = \lim_{x\searrow 0} \left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2.$$

Da bo funkcija $f(x)$ pri $x=0$ zvezna, morata biti ti dve limiti enaki. Iz tega pogoja dobimo enačbo za konstanto a:

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(x)$$

$$a = 2.$$

Poglavje 5

[redacted]

Pravila odvajanja:

1. odvod vsote ali razlike dveh funkcij: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

2. odvod funkcije, pomnožene s konstanto λ: $(\lambda \cdot f(x))' = \lambda \cdot f'(x)$.

3. odvod produkta dveh funkcij: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

4. odvod kvocienta dveh funkcij: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$.

5. odvod sestavljene funkcije: $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Tabela odvodov elementarnih funkcij:

$(C)' = 0$, C je konstanta.

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$.

$(\sin x)' = \cos x$.

$(\cos x)' = -\sin x$.

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

$(e^x)' = e^x$.

$(a^x)' = a^x \ln a$.

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

1. Odvajaj polinom: $p(x) = 6x^5 - 7x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 4x + 4$.

   Rešitev: Upoštevamo pravilo za odvod funkcije, pomnožene s skalarjem ter pravilo za odvod vsote oziroma razlike funkcij. Posebej odvajamo vsak člen polinoma. Dobimo:

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= 6 \cdot 5x^4 - 7 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x^1 + 4 \cdot 1x^0 + 0 \\
&= 30x^4 - 28x^3 - 21x^2 - 18x + 4.
\end{aligned}
$$

2. Odvajaj polinom: $p(x) = (x-1)^3(x+2)$.

   Rešitev: Najprej odvajamo po pravilu za odvod produkta dveh funkcij:

$$
p'(x) = ((x-1)^3)' \cdot (x+2) + (x-1)^3 \cdot (x+2)'
$$

   Nato za odvod prvega člena upoštevamo pravilo o odvodu sestavljene funkcije, kjer je zunanja funkcija tretja potenca, notranja funkcija pa polinom $x-1$:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= 3\cdot(x-1)^2\cdot(x-1)'\cdot(x+2)+(x-1)^3\cdot 1\\
&= 3\cdot(x-1)^2\cdot 1\cdot(x+2)+(x-1)^3\\
&= (x-1)^2\cdot(3\cdot(x+2)+(x-1)) = (x-1)^2\cdot(4x+5).
\end{aligned}$$

3. Odvajaj funkcijo: $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Rešitev: Funkcijo $f(x)$ najprej zapišemo kot potenco in nato odvajamo po pravilu za odvod sestavljene funkcije. Zunanja funkcija je v tem primeru potenca (oziroma koren), notranja pa polinom x^2-1:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}=(x^2-1)^{\frac{1}{2}},$$

zato je

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)'=\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

4. Odvajaj racionalno funkcijo: $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+1}$.

Rešitev: Za odvod racionalne funkcije uporabimo pravilo za odvod kvocienta dveh funkcij:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^3-3x+2)'\cdot(x^2+1)-(x^3-3x+2)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{(3x^2-3)\cdot(x^2+1)-(x^3-3x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{3x^4-3x^2+3x^2-3-2x^4+6x^2-4x}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{x^4+6x^2-4x-3}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

5. Odvajaj racionalno funkcijo: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Rešitev: To nalogo lahko rešimo na dva različna načina:

1. način: Po pravilu za odvod kvocienta dveh funkcij je:

$$f'(x) = \frac{1' \cdot (x^2+1) - 1 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{0-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

2. način: Lahko pa funkcijo $f(x)$ zapišemo kot potenco namesto kot ulomek in jo šele nato odvajamo. V tem primeru uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1},$$

zato je njen odvod

$$f'(x) = (-1) \cdot (x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)' = -2x \cdot (x^2+1)^{-2}.$$

6. Odvajaj funkcijo: $f(x) = -\cos(2x + \frac{\pi}{2})$.

Rešitev: Uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije. Zunanja funkcija je kosinus, notranja funkcija pa polinom $2x + \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(-\sin(2x+\frac{\pi}{2})) \cdot (2x+\frac{\pi}{2})' = \sin(2x+\frac{\pi}{2}) \cdot 2 \\ &= 2\sin(2x+\frac{\pi}{2}) = 2\cos(2x). \end{aligned}$$

7. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

Rešitev: Uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije, kjer je zunanja funkcija sinus, notranja pa polinom $2x - \frac{\pi}{3}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{3}) \cdot (2x-\frac{\pi}{3})' = \frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{3}) \cdot 2 = \cos(2x-\frac{\pi}{3}).$$

8. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \cos 2x \cdot \sin 3x$.

Rešitev: Najprej upoštevamo pravilo za odvod produkta dveh funkcij:

$$f'(x) = (\cos 2x)' \cdot \sin 3x + \cos 2x \cdot (\sin 3x)'.$$

Vsakega od tako dobljenih dveh členov odvajamo po pravilu za odvod sestavljene funkcije, kjer je zunanja funkcija sinus ali kosinus, notranja funkcija pa ustrezen linearen polinom spremenljivke x:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin 2x \cdot 2 \cdot \sin 3x + \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot 3 \\ &= -2 \sin 2x \cdot \sin 3x + 3 \cos 2x \cdot \cos 3x. \end{aligned}$$

9. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Rešitev: Uporabimo pravilo za odvod kvocienta:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cdot x - (\sin x) \cdot x'}{x^2} = \frac{x \cdot \cos x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}.$$

10. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Rešitev: Drugi člen dane funkcije zapišemo malo drugače in šele nato odvajamo:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x,$$

zato je njen odvod enak

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - (-\frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

11. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Rešitev: Potrebovali bomo pravilo za odvod kvocienta dveh funkcij ter pravilo za odvod sestavljene funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin^2 x)' \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(2\sin x \cdot \cos x) \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x. \end{aligned}$$

12. Odvajaj funkcijo: $f(x) = x^2 \cdot \arcsin x$.

Rešitev: Funkcijo odvajamo kot produkt dveh funkcij:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' = 2x \cdot \arcsin x + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$.

Rešitev: Vsak člen odvajamo posebej:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

14. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \arccos(\sin x)$.

Rešitev: Uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije. Zunanja funkcija je arkuskosinus, notranja pa sinus:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot (\sin x)' = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ &= -\frac{\cos x}{|\cos x|}. \end{aligned}$$

15. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rešitev: Tudi to je sestavljena funkcija. Zunanja funkcija je arkustangens, notranja pa ulomek $\frac{1}{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot (x^{-1})' = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot (-x^{-2})$$
$$= -\frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2+1}.$$

16. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Rešitev: Odvajamo po pravilu za odvod sestavljene funkcije. Zunanja funkcija je arkustangens, notranja pa ulomek $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (ki ga seveda odvajamo po pravilu za odvod kvocienta):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2} \cdot \frac{(1-x^2)' \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{(1+x^2)^2}{2+2x^4} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{2(1+x^4)} = -\frac{2x}{1+x^4}.
\end{aligned}$$

17. Odvajaj funkcijo: $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

Rešitev: Po pravilu za odvod produkta dobimo:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x.$$

18. Odvajaj funkcijo: $f(x) = e^{3x^2-5x+1}$.

Rešitev: To je sestavljena funkcija, kjer je zunanja funkcija eksponentna, notranja pa polinom $3x^2 - 5x + 1$. Odvajamo po pravilu za odvod sestavljene funkcije:

$$f'(x) = e^{3x^2-5x+1} \cdot (3x^2 - 5x + 1)' = e^{3x^2-5x+1} \cdot (6x - 5).$$

19. Odvajaj funkcijo: $f(x) = x \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}}$.

Rešitev: Najprej odvajamo produkt:

$$f'(x) = x' \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}} + x \cdot \left(e^{\frac{x^2-1}{x}}\right)'$$

Nato za drugi člen uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije, kjer je zunanja funkcija eksponentna, notranja funkcija pa ulomek $\frac{x^2-1}{x}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}} + x \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x}\right)' \\
&= e^{\frac{x^2-1}{x}} + x \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \left(\frac{(x^2-1)' \cdot x - (x^2-1) \cdot x'}{x^2}\right) \\
&= e^{\frac{x^2-1}{x}} + x \cdot e^{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \left(\frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2}\right) = e^{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \left(1 + x \cdot \frac{x^2+1}{x^2}\right) \\
&= e^{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \left(1 + x + \frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

20. Odvajaj funkcijo: $f(x) = e^x \cdot \cos^2 x$.

Rešitev: Najprej odvajamo produkt funkcij, pri odvodu drugega člena pa upoštevamo pravilo za odvod sestavljene funkcije:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x)' \cdot \cos^2 x + e^x \cdot (\cos^2 x)' = e^x \cdot \cos^2 x + e^x \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' \\
&= e^x \cdot \cos^2 x + 2e^x \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = e^x \cdot \cos x \cdot (\cos x - 2\sin x).
\end{aligned}$$

21. Odvajaj funkcijo: $f(x) = 3^{x^2-2x}$.

Rešitev: Funkcija je sestavljena iz zunanje eksponentne funkcije 3^x in notranjega polinoma $x^2 - 2x$. Odvajamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3^{x^2-2x} \cdot \ln 3 \cdot (x^2 - 2x)' = 3^{x^2-2x} \cdot \ln 3 \cdot (2x - 2) \\ &= 2 \ln 3 \cdot (x - 1) \cdot 3^{x^2-2x}. \end{aligned}$$

22. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \sin(2^{3x-1})$.

Rešitev: Funkcija je sestavljena iz treh funkcij: $f(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$, kjer $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = 2^x$ in $f_3 = 3x - 1$. Ko upoštevamo pravilo za odvod sestavljene funkcije, dobimo naslednjo formulo za odvod $f'(x)$:

$$f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x).$$

Po tem pravilu sedaj odvajajmo našo funkcijo:

$$f'(x) = \cos\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(2^{3x-1} \cdot \ln 2\right) \cdot 3 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-1} \cdot \cos\left(2^{3x-1}\right).$$

23. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \ln(-3x + 2)$.

Rešitev: Spet odvajamo po pravilu za odvod sestavljene funkcije. Zunanja funkcija je logaritem, notranja pa linearen polinom $-3x + 2$:

$$f'(x) = \frac{1}{-3x + 2} \cdot (-3x + 2)' = \frac{-3}{-3x + 2}.$$

24. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$.

Rešitev: Funkcija je sestavljena iz zunanjega logaritma in notranje racionalne funkcije (ki jo odvajamo po pravilu za odvod kvocienta):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{x' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

25. Odvajaj funkcijo: $f(x) = \ln(\sin x)$.

Rešitev: To je sestavljena funkcija, kjer je zunanja funkcija logaritem, notranja pa sinus. Ko jo odvajamo, dobimo:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

26. Odvajaj funkcijo $f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$.

Rešitev: Funkcijo odvajamo po pravilu za odvod kvocienta:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot (1+x) - \ln x \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1+x) - \ln x}{(1+x)^2}.$$

27. Odvajaj funkcijo $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$.

Rešitev: Funkcija je sestavljena iz treh zaporednih logaritmov. Najprej odvajamo zunanjega:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot (\ln(\ln(x)))'$$

nato srednjega:

$$= \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot (\ln(x))'$$

in nato še zadnjega, najbolj notranjega:

$$= \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}.$$

28. Odvajaj implicitno podano krivuljo $y(x)$. Krivulja je podana z naslednjo enačbo:

$$x^2 + 3xy - y^2 = 3x + 5.$$

Rešitev: Obe strani enačbe odvajamo po spremenljivki x, hkrati pa upoštevamo, da je $y(x)$ funkcija spremenljivke x. Člen $3xy$ odvajamo kot produkt dveh funkcij spremenljivke x: $3x \cdot y(x)$. Člen y^2 odvajamo po pravilu za sestavljeno funkcijo: ta člen je namreč lahko zapišemo kot $(y(x))^2$, pri tem je zunanja funkcija kvadratna potenca, notranja funkcija pa $y(x)$. Po odvajanju dobimo:

$$2x + ((3x)' \cdot y + 3x \cdot y') - 2y \cdot y' = 3$$

$$2x + 3y + 3xy' - 2yy' = 3$$

Iz dobljene enačbe lahko izračunamo iskani odvod y':

$$y'(3x - 2y) = 3 - 2x - 3y$$

$$y' = \frac{3 - 2x - 3y}{3x - 2y}$$

29. Odvajaj implicitno krivuljo $y(x)$, ki je podana z naslednjo enačbo:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

Izračunaj vrednost odvoda dane krivulje v točki $T(2,1)$.

Rešitev: Kot pri prejšnji nalogi odvajamo obe strani enačbe po spremenljivki x in pri tem upoštevamo, da y ni neodvisna spremenljivka, temveč funkcija spremenljivke x. Dobimo:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'$$

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \cdot (2x + 2yy')$$

$$\frac{y'x - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}$$

Iz tako dobljene enačbe lahko sedaj izračunamo iskani odvod y':

$$y'x - y = x + yy'$$

$$y'(x - y) = x + y$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Da bi dobili iskano vrednost odvoda v točki $T(2,1)$, sedaj le še vstavimo za x vrednost 2 ter za y vrednost 1 v dobljeno formulo:

$$y(2,1) = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

30. Poišči drugi odvod funkcije: $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rešitev: Da dobimo drugi odvod, funkcijo $f(x)$ odvajamo dvakrat zaporedoma. Prvi odvod:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot (x^{-1})' = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot (-x^{-2}) \\ &= -\frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Ta rezultat nato še enkrat odvajamo:

$$f''(x) = -\frac{1' \cdot (x^2+1) - 1 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{0-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

31. Poišči n-ti odvod funkcije: $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Rešitev: Pred odvajanjem funkcijo razcepimo na parcialna ulomka. Nastavek za razcep je naslednji:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

A in B sta konstanti, ki ju bomo izračunali iz enačbe, sestavljene iz zadnjih dveh izrazov nastavka:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

To enačbo sedaj pomnožimo z $(x+1)(x-1)$, da se znebimo ulomkov:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \Big/ (x+1)(x-1)$$

$$1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$1 = Ax - A + Bx + B$$

Na obeh straneh enačbe smo dobili linearen polinom v spremenljivki x. Polinoma sta enaka natanko tedaj, ko imata enake istoležne koeficiente (to je koeficiente pri enakih potencah spremenljivke x). Zato lahko s primerjavo koeficientov določimo konstanti A in B:

$$\begin{array}{lcl} \text{koeficient pri } x^1 & : & 0 = A + B \\ \text{koeficient pri } x^0 & : & 1 = -A + B \end{array}$$

Dobili smo sistem dveh linearnih enačb za dve neznanki A in B:

$$0 = A + B,\ 1 = -A + B$$

Rešimo sistem in dobimo: $A = -\frac{1}{2}$ ter $B = \frac{1}{2}$. Rešitev vstavimo nazaj v nastavek in začetno funkcijo zapišemo takole:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x-1)^{-1} - (x+1)^{-1}\right) \end{aligned}$$

n-ti odvod te funkcije poiščemo tako, da jo postopoma nekajkrat odvajamo. Nato iz zaporednih odvodov izpeljemo splošno formulo za n-ti odvod (ki pa bi jo morali še dokazati s pomočjo popolne indukcije):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left((-1)\cdot(x-1)^{-2}-(-1)\cdot(x+1)^{-2}\right)\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left((-1)(-2)\cdot(x-1)^{-3}-(-1)(-2)\cdot(x+1)^{-3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^2\cdot 2!\cdot(x-1)^{-3}-(-1)^2\cdot 2!\cdot(x+1)^{-3}\right)\\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\left((-1)(-2)(-3)\cdot(x-1)^{-4}-(-1)(-2)(-3)\cdot(x+1)^{-4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^3\cdot 3!\cdot(x-1)^{-4}-(-1)^3\cdot 3!\cdot(x+1)^{-4}\right)\\
f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2}\big((-1)(-2)(-3)(-4)\cdot(x-1)^{-5}\\
&\qquad -(-1)(-2)(-3)(-4)\cdot(x+1)^{-5}\big)\\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^4\cdot 4!\cdot(x-1)^{-5}-(-1)^4\cdot 4!\cdot(x+1)^{-5}\right)
\end{aligned}$$

Iz dobljenih odvodov sklepamo, da je iskani n-ti odvod funkcije $f(x)$ enak:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left((-1)^n\cdot n!\cdot(x-1)^{-(n+1)}-(-1)^n\cdot n!\cdot(x+1)^{-(n+1)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot(-1)^n\cdot n!\left((x-1)^{-(n+1)}-(x+1)^{-(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

Za popolno matematično pravilnost bi morali to formulo še dokazati s pomočjo popolne indukcije, vendar se bomo mi zadovoljili z dobljenim rezultatom.

32. Določi intervale, kjer je funkcija $f(x)$ naraščajoča, ter intervale, kjer je padajoča. Funkcija $f(x)$ je dana s predpisom:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7.$$

Rešitev: Funkcija $f(x)$ narašča na intervalih, kjer je njen prvi odvod večji od nič in pada na intervalih, kjer je ta odvod manjši od nič. Izračunajmo njen odvod:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

Nastavimo neenačbo za intervale padanja:

$$6x^2 + 6x - 12 \leq 0$$

$$6(x^2 + x - 2) \leq 0$$

$$6(x-1)(x+2) \leq 0$$

Na levi strani neenačbe imamo kvadratno parabolo, ki je obrnjena navzgor (ker je koeficient pri kvadratnem členu pozitiven) in ima ničli v točkah $x_1 = -2$ in $x_2 = 1$. Parabola je med ničlama negativna, na območju levo od x_1 ter desno od x_2 pa pozitivna. Iz tega lahko takoj določimo intervale padanja in naraščanja funkcije $f(x)$: funkcija pada tam, kjer je parabola negativna, se pravi za $x \in [-2, 1]$, narašča pa tam, kjer parabola zavzame pozitivne vrednosti, se pravi za $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$.

33. Poišči stacionarne točke funkcije $f(x)$, ki je dana s predpisom:

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) \cdot e^x$$

ter jih karakteriziraj.

Rešitev: Stacionarne točke so točke, v katerih je prvi odvod funkcije enak nič. Izračunajmo odvod:

$$f'(x) = (2x-6) \cdot e^x + (x^2 - 6x + 9) \cdot e^x = (x^2 - 4x + 3) \cdot e^x.$$

Nastavimo enačbo za stacionarne točke, kar storimo tako, da dobljeni odvod funkcije $f(x)$ izenačimo z nič:

$$(x^2 - 4x + 3) \cdot e^x = 0$$

$$(x-1)(x-3) \cdot e^x = 0$$

Rešitvi te enačbe sta $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$. Izračunajmo še vrednosti funkcije pri dobljenih vrednostih spremenljivke x in s tem popolnoma določimo stacionarni točki:

$$T_1(x_1, f(x_1)) = T_1(1, f(1)) = T_1(1, (1 - 6 + 9) \cdot e) = T_1(1, 4e)$$

$$T_2(x_2, f(x_2)) = T_2(3, f(3)) = T_2(3, (9 - 18 + 9) \cdot e) = T_2(3, 0)$$

Naloga zahteva, da ti dve točki še karakteriziramo, kar pomeni, da moramo ugotoviti, ali v posamezni točki nastopa ekstrem ali prevoj. To storimo tako, da preverimo vrednost drugega odvoda funkcije $f(x)$ v vsaki posamezni točki: če je drugi odvod v stacionarni točki pozitiven, je tam minimum. Če je drugi odvod negativen, je tam maksimum. Če pa je drugi odvod enak nič, je to prevojna točka. Izračunajmo drugi odvod naše funkcije $f(x)$:

$$f''(x) = (2x-4)\cdot e^x + (x^2-4x+3)\cdot e^x = (x^2-2x-1)\cdot e^x.$$

Preverimo vrednost drugega odvoda v vsaki od izračunanih stacionarnih točk. Ker je:

$$f''(x_1) = f''(1) = (1-2-1)\cdot e^1 = -2e < 0,$$

je v točki $T_1(1, 4e)$ dosežen ekstrem in sicer maksimum. In ker je:

$$f''(x_2) = f''(3) = (9-6-1)\cdot e^1 = 2e > 0,$$

je tudi v točki $T_2(3, 0)$ dosežen ekstrem, ki pa je tokrat minimum.

34. Določi vrednosti konstant a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}$$

dosegla ekstrem v točki $A(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$.

Rešitev: Veljati morata dva pogoja:

a) točka A mora ležati na grafu funkcije $f(x)$, se pravi, da mora biti

$$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}.$$

b) da bo v točki A dosežen ekstrem, mora biti v njej prvi odvod funkcije $f(x)$ enak nič:

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 0.$$

Izračunajmo prvi odvod funkcije $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sin x\cos x(a-b\cos x)-\sin^2 x(-b(-\sin x))}{(a-b\cos x)^2} \\ &= \frac{2a\sin x\cos x-2b\sin x\cos^2 x-b\sin^3 x}{(a-b\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(2a\cos x-2b\cos^2 x-b\sin^2 x)}{(a-b\cos x)^2}. \end{aligned}$$

Nastavimo prvo enačbo (iz pogoja a):

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{a-b\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{a-b\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{4(2a-b)}=\frac{1}{4}$$

$$2a-b=6$$

Drugo enačbo dobimo iz pogoja b:

$$f'(\frac{\pi}{3})=0$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}(2a\cos\frac{\pi}{3}-2b\cos^2\frac{\pi}{3}-b\sin^2\frac{\pi}{3})}{(a-b\cos\frac{\pi}{3})^2}=0$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2a\frac{1}{2}-2b(\frac{1}{2})^2-b(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)}{(a-b\frac{1}{2})^2}=0$$

$$a-\frac{b}{2}-\frac{3b}{4}=0$$

$$4a-5b=0$$

Dobili smo sistem dveh linearnih enačb za dve neznanki, a in b.

$$2a-b=6, 4a-5b=0$$

Iz prve enačbe izrazimo $b = 2a - 6$ in ga vstavimo v drugo enačbo:

$$4a - 5(2a - 6) = 0$$

$$-6a + 30 = 0$$

$$a = 5$$

$$b = 2a - 6 = 10 - 6 = 4$$

Za nastop stacionarne točke morata torej vrednosti konstant biti $a = 5$ in $b = 4$. Ali je v tej stacionarni točki res ekstrem, pa preverimo tako, da izračunamo drugi odvod funkcije $f(x)$ za izračunani vrednosti konstant. Prvi odvod poznamo že od prej - vanj sedaj vstavimo $a = 5$ in $b = 4$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x(2a\cos x - 2b\cos^2 x - b\sin^2 x)}{(a - b\cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(10\cos x - 8\cos^2 x - 4\sin^2 x)}{(5 - 4\cos x)^2}. \end{aligned}$$

Ko ta odvod še enkrat odvajamo in rezultat poračunamo, dobimo:

$$\begin{aligned} f''(x) =& \frac{10\cos^2 x - 8\cos^3 + 4\cos x\sin^2 x - 10\sin^3 x}{(5 - 4\cos x)^2} \\ &- \frac{8\sin^2 x(10\cos x - 8\cos^2 x - 4\sin^2 x}{(5 - 4\cos x)^3}. \end{aligned}$$

Vstavimo $x = \frac{\pi}{3}$ in dobimo:

$$f''(x) = 9(1 - \frac{5\sqrt{3}}{4}) < 0,$$

kar pomeni, da je v točki $A(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$ res dosežen ekstrem funkcije $f(x)$ in sicer je ta ekstrem maksimum.

35. Poišči definicijsko območje, ničle, ekstreme in prevoje funkcije

$$f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

in nariši njen graf.

Rešitev: Definicijsko območje: definiran mora biti logaritem, se pravi, da mora biti njegov argument strogo večji od nič.

$$\frac{x}{2} > 0 \Longrightarrow D_f = (0, \infty).$$

Ničle: nastavimo enačbo za ničle, tako da $f(x)$ izenačimo z nič.

$$f(x) = 0$$

$$x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Ta enačba se razcepi na dve enačbi: iz prvega faktorja dobimo $x_1 = 0$. Iz drugega faktorja pa dobimo enačbo:

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{x}{2} = 1$$

$$x_2 = 2$$

Rešitev x_1 ni v definicijskem območju D_f, vendar velja, da je desna limita $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$. O tem se prepričamo tako, da to limito izračunamo s pomočjo L'Hôpitalovega pravila:

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 0} x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) &= \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x^{-1}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{(\ln\left(\frac{x}{2}\right))'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2}}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} (-x) = 0.\end{aligned}$$

Ekstremi in prevoji: z nastavkom enačbe $f'(x) = 0$ izračunamo stacionarne točke.

$$f'(x) = 1 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1.$$

Enačba za stacionarne točke:

$$f'(x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{x}{2} = e^{-1}$$
$$x = \frac{2}{e}$$

Izračunajmo še vrednost funkcije pri tem x-u:

$$f(\frac{2}{e}) = \frac{2}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}.$$

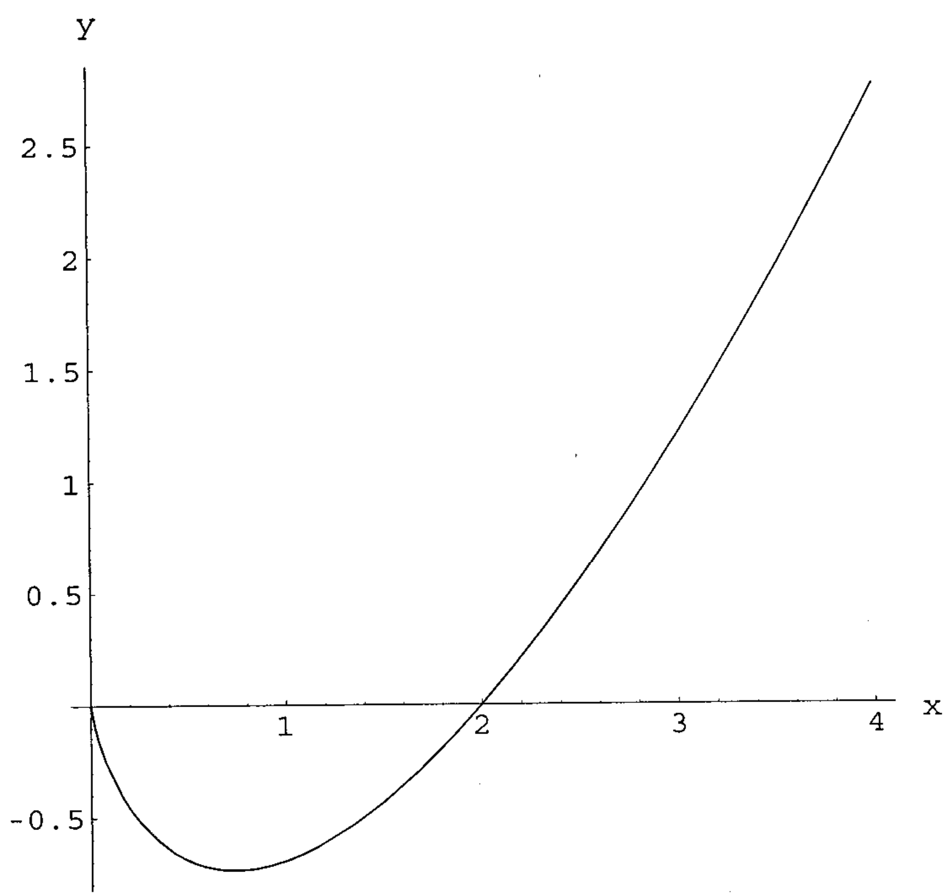
Stacionarna točka je torej samo ena: $T(\frac{2}{e}, -\frac{2}{e})$.

Za karakterizacijo te stacionarne točke potrebujemo vrednost drugega odvoda:

$$f''(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$$
$$f''(\frac{2}{e}) = \frac{e}{2} > 0$$

Ker je vrednost drugega odvoda v stacionarni točki večja od nič, je v tej točki ekstrem in sicer minimum.

Sedaj lahko ob upoštevanju vsega, kar smo naračunali, narišemo graf funkcije $f(x)$:



36. Poišči definicijsko območje, ničle, ekstreme in prevoje funkcije

$$f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$$

in nariši njen graf.

Rešitev: Definicijsko območje: funkcija je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato njeno definicijsko območje D_f zajema vsa realna števila:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Ničle:

$$f(x) = 0$$
$$x^3 \cdot e^{-x} = 0$$

Edina rešitev te enačbe je $x_1 = 0$.

Ekstremi in prevoji: funkcijo $f(x)$ odvajamo in iz enačbe $f'(x) = 0$ izračunamo stacionarne točke. Odvod funkcije $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x}$$

Enačba za stacionarne točke:

$$f'(x) = 0$$
$$(3x^2 - x^3) \cdot e^{-x} = 0$$
$$x^2(3 - x) \cdot e^{-x} = 0$$

Rešitvi te enačbe sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 3$. Stacionarni točki sta torej dve:

$$T_1(x_1, f(x_1)) = T_1(0, f(0)) = T_1(0, 0)$$
$$T_2(x_2, f(x_2)) = T_2(3, f(3)) = T_2(3, 27e^{-3})$$

Določiti je treba tip teh dveh točk. V ta namen uporabimo drugi odvod:

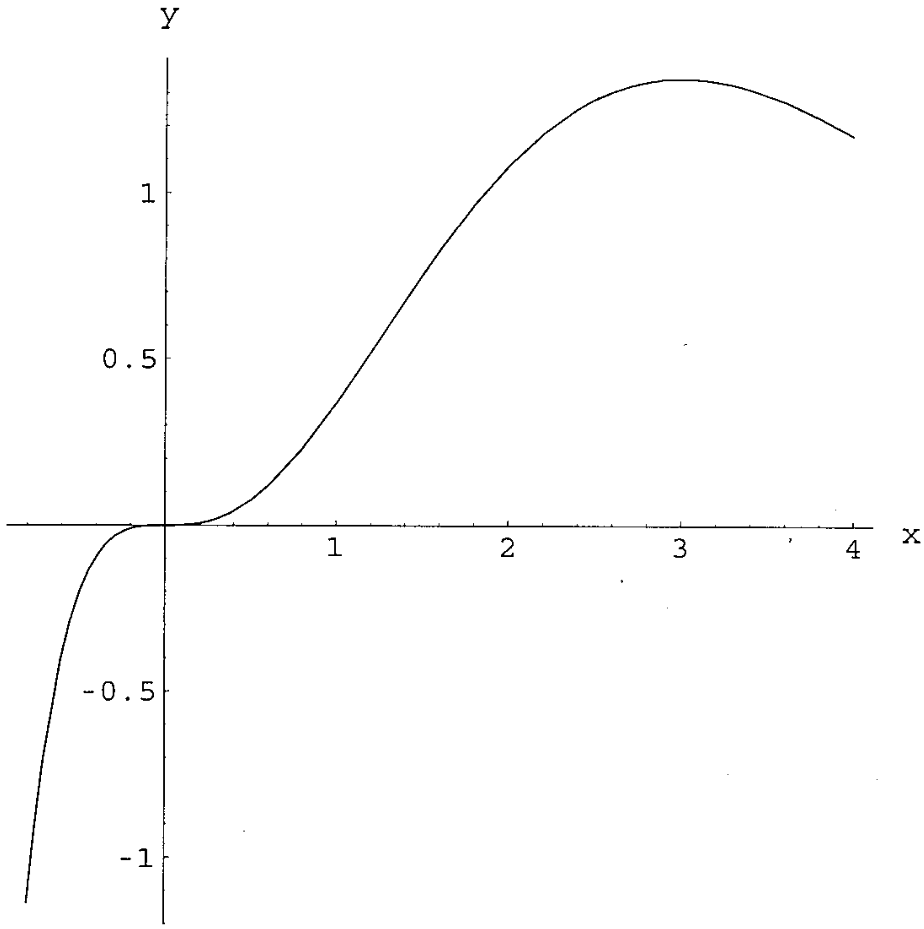
$$f''(x) = (6x - 3x^2) \cdot e^{-x} - (3x^2 - x^3) \cdot e^{-x} = (6x - 6x^2 + x^3) \cdot e^{-x}$$

Ker je $f''(0) = 0$, je v točki $T_1(0, 0)$ prevoj. In ker je $f''(3) = (18 - 54 + 27) \cdot e^{-3} = -9 \cdot e^{-3} < 0$, je v točki $T_2(3, 27e^{-3})$ dosežen maksimum.

Da bomo lažje narisali graf, preverimo še obnašanje funkcije $f(x)$ v $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Sedaj le še narišemo graf funkcije $f(x)$:



37. Določi točki, v katerih funkcija

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 3}$$

doseže največjo in najmanjšo vrednost na intervalu $I = [-2, 3]$.

Rešitev: Poiščimo ekstreme te funkcije.

$$f'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2 - 5)}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$$

Enačba $f'(x) = 0$ oziroma $(x+1)(x+5) = 0$ ima dve rešitvi: $x_1 = -1$ in $x_2 = -5$, od katerih pa x_2 ne leži na danem intervalu I in nas torej ne zanima. Preostane nam le stacionarna točka pri x_1, za katero moramo določiti, ali v njej sploh nastopa ekstrem. Izračunajmo drugi odvod funkcije $f(x)$ in njegovo vrednost pri x_1:

$$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2 + 6x + 5) \cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = \frac{(-2+6)(-1+3)^2 - (1-6+5)\cdot 2(-1+3)}{(-1+3)^4} = 1.$$

Ker je vrednost drugega odvoda večja od nič, je v točki $T_1(x_1, f(x_1)) = T_1(-1,-2)$ minimum oziroma najmanjša vrednost na intervalu I. Ker na intervalu I ni nobene druge stacionarne točke razen $T_1(-1,-2)$, funkcija $f(x)$ doseže največjo vrednost v enem od krajišč intervala I. Izračunajmo vrednosti funkcije v obeh krajiščih in ju primerjajmo med seboj:

$$f(-2) = -1,$$

$$f(3) = \frac{2}{3}.$$

Vrednost v desnem krajišču danega intervala, $f(3)$, je večja od vrednosti, ki jo funkcija doseže v levem krajišču danega intervala, $f(-2)$. Zato je največja vrednost na intervalu I dosežena v točki $T_2(3, \frac{2}{3})$.

38. Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija $f(x)$ zvezna in zvezno odvedljiva za vsako realno število x. Funkcija $f(x)$ je dana s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & ; \quad x \leq 0 \\ ax+b & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

Rešitev: Funkcija $f(x)$ je zvezna in zvezno odvedljiva za vsak realen x, razen za $x=0$, ki je edina problematična točka. Najprej bomo preverili zveznost funkcije v tej točki. Funkcija $f(x)$ je zvezna pri $x=0$, če njena leva in desna limita tam zavzameta enako vrednost:

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x\nearrow 0}(x^2+2x-1) = \lim_{x\searrow 0}(ax+b)$$

$$-1 = b$$

Funkcija $f(x)$ je torej zvezna pri $x=0$ za vrednost $b=-1$.

Preverimo še zvezno odvedljivost: to pomeni, da mora biti pri $x=0$ zvezen tudi odvod $f(x)$. Izračunajmo ta odvod:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & ; \quad x \leq 0 \\ a & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

Odvod $f'(x)$ je zvezen v neki točki, če sta tam njegova leva in desna limita enaki. Izenačimo desno in levo limito odvoda $f'(x)$ pri $x = 0$:

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} f'(x)$$

$$\lim_{x \nearrow 0}(2x + 2) = \lim_{x \searrow 0} a$$

$$2 = a$$

Odvod je zvezen za vrednost $a = 2$.

Funkcija $f(x)$ je torej zvezna in zvezno odvedljiva za vsako realno število x, če konstanti zavzameta vrednosti $a = 2$ in $b = -1$.

39. Zapiši enačbi tangente in normale na krivuljo

$$f(x) = x^2(2 - x)^2$$

v točki $T(3, y)$.

Rešitev: Najprej določimo manjkajočo koordinato točke $T(3, y)$:

$$y = f(3) = 3^2(2 - 3)^2 = 9 \Longrightarrow T(3, 9).$$

Smerni koeficient tangente k_t je vrednost odvoda $f'(x)$ v dani točki:

$$f'(x) = 2x \cdot (2 - x)^2 + x^2 \cdot 2 \cdot (2 - x) \cdot (-1) =$$

$$= 2x \cdot (2 - x) \cdot (2 - 2x) =$$

$$= 4x \cdot (2 - x) \cdot (1 - x).$$

$$k_t = f'(3) = 12 \cdot (2 - 3) \cdot (1 - 3) = 24$$

Zapisati moramo enačbo premice s smernim koeficientom $k_t = 24$, ki gre skozi točko $T(3, 9)$. Uporabimo splošno enačbo premice skozi točko $T(x_0, y_0)$ s smernim koeficientom k:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

V našem primeru:

$$y - 9 = 24(x - 3)$$

$$y = 24x - 72 + 9$$

Enačba tangente je torej:

$$y = 24x - 63.$$

Normala poteka skozi isto točko $T(3,9)$ kot tangenta, ker pa je pravokotna na tangento, je njen smerni koeficient obratna in nasprotna vrednost smernega koeficienta tangente:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{24}$$

Z uporabo enakega nastavka kot poprej (za enačbo premice skozi točko T in s smernim koeficientom k_n) sedaj dobimo:

$$y - 9 = -\frac{1}{24}(x-3)$$

$$y = -\frac{1}{24}x + \frac{3}{24} + 9$$

Enačba normale je:

$$y = -\frac{1}{24}x + \frac{219}{24}.$$

40. Zapiši enačbi tangente in normale na krivuljo $f(x) = \ln(\sin x)$ v točki $T(\frac{\pi}{2}, y)$.

Rešitev: Kot pri prejšnji nalogi najprej določimo manjkajočo koordinato točke $T(\frac{\pi}{2}, y)$:

$$y = f(\frac{\pi}{2}) = \ln(\sin\frac{\pi}{2}) = \ln 1 = 0.$$

Točka T je torej $T(\frac{\pi}{2}, 0)$. Izračunajmo smerni koeficient tangente:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

$$k_t = f(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$$

Kot pri prejšnji nalogi lahko nastavimo formulo premice s smernim koeficientom k_t, ki poteka skozi točko T:

$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$y - 0 = 0(x - \frac{\pi}{2})$$

Enačba tangente je torej $y = 0$, kar je os x.

Ker je smerni koeficient tangente enak nič, smernega koeficienta normale $k_n = -\frac{1}{k_t}$ ne moremo kar tako izračunati, saj bi prišlo do deljenja z nič. Vemo pa, da je tangenta vodoravna premica. Ker je normala premica, ki je pravokotna na tangento (ki je vodoravna premica), bo normala navpična premica, ki gre skozi točko $T(\frac{\pi}{2}, 0)$. Taka premica ima enačbo $x = \frac{\pi}{2}$.

41. Zapiši enačbi tangente in normale na implicitno podano krivuljo $y(x)$ v točki $T(2, 1)$. Krivulja je podana z naslednjo enačbo:

$$\ln y + \frac{x}{y} = 2.$$

Rešitev: Za smerni koeficient tangente potrebujemo odvod krivulje $y'(x)$, ki ga izračunamo tako, da obe strani enačbe implicitno odvajamo:

$$\frac{1}{y} \cdot y' + \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = 0$$

$$y \cdot y' + y - x \cdot y' = 0$$

$$(y - x) \cdot y' = -y$$

$$y' = \frac{y}{x - y}$$

Smerni koeficient tangente:

$$k_t = y'(2, 1) = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

Tangenta je premica s smernim koeficientom $k_t = 1$, ki poteka skozi točko $T(2, 1)$:

$$y - y_0 = k_t(x - x_0)$$

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2)$$

Njena enačba se torej glasi:

$$y = x - 1.$$

Izračunajmo smerni koeficient normale:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -1$$

Sedaj lahko brez težav izračunamo enačbo normale:

$$y - y_0 = k_n(x - x_0)$$

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 2)$$

Enačba normale je torej:

$$y = -x + 3.$$

42. Določi kot, pod katerim se sekata funkciji $f(x)$ in $g(x)$ v izhodišču. Funkciji sta dani z naslednjima predpisoma:

$$f(x) = x^3,\ g(x) = x.$$

Rešitev: Kot med funkcijama $f(x)$ in $g(x)$ je enak kotu med tangentama teh dveh funkcij v točki $T(0,0)$. Da bi ta kot lahko izračunali, potrebujemo smerna koeficienta obeh tangent. V ta namen obe funkciji odvajamo:

$$f'(x) = 3x^2,\ g'(x) = 1.$$

Izračunamo smerna koeficienta obeh tangent v točki $T(0,0)$:

$$k_{t_f} = f'(0) = 0,\ k_{t_g} = g'(0) = 1.$$

Kot ϕ med premicama (in torej tudi med funkcijama $f(x)$ in $g(x)$) s smernima koeficientoma k_{t_f} in k_{t_g} izračunamo po naslednji znani formuli za kot med dvema premicama:

$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{k_{t_g} - k_{t_f}}{1 + k_{t_f} \cdot k_{t_g}}\right|.$$

V formulo vstavimo izračunana smerna koeficienta in dobimo:

$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{1 - 0}{1 + 1 \cdot 0}\right| = 1.$$

Ker je $\operatorname{tg}\phi = 1$, sledi, da je kot med krivuljama enak $\phi = \frac{\pi}{4} = 45^o$.

43. Poišči tiste točke na grafu funkcije $f(x)$, ki so najbližje točki $A(1,3)$. Funkcija $f(x)$ je dana s predpisom:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Rešitev: Iščemo točke, kjer funkcija, ki opisuje razdaljo med točko $A(1,3)$ in splošno točko na grafu funkcije $f(x)$, doseže minimum. Da bi zapisali funkcijo razdalje, se najprej spomnimo, kako izračunamo razdaljo med dvema splošnima točkama $T_1(x_1, y_1)$ ter $T_2(x_2, y_2)$:

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}.$$

Zapišimo sedaj splošno točko na grafu funkcije $f(x)$ - taka točka bo oblike:

$$T(x, f(x)) = T(x, x^2 - 2x + 3).$$

Razdaljo med dano točko A in točko T na grafu funkcije $f(x)$ zapišemo kot:

$$d(x) = \sqrt{(x^2 - 2x + 3 - 3)^2 + (x - 1)^2} = \sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}.$$

Iščemo torej minimimum funkcije $d(x)$. Funkcijo najprej odvajamo:

$$d'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1)'}{\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3 - 12x^2 + 10x - 2}{\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}}.$$

Iz enačbe $d'(x) = 0$ določimo stacionarne točke:

$$d'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3 - 12x^2 + 10x - 2}{\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}} = 0$$

$$4x^3 - 12x^2 + 10x - 2 = 0$$

Poiskati bo treba ničle tako dobljenega kubičnega polinoma. To storimo tako, da eno ničlo uganemo, ostale pa potem poiščemo z razcepom polinoma s pomočjo Hornerjevega algoritma. Uganemo: ena izmed ničel je $x_1 = 1$. Zanjo sedaj na našem polinomu uporabimo Hornerjev algoritem:

	2	-6	5	-1
		+	+	+
		2	-4	1
x_1=1	2	-4	1	0

V spodnji vrsti smo dobili koeficiente polinoma-kvocienta, ki ga dobimo pri deljenju začetnega kubičnega polinoma z linearnim polinomom $x - x_1 = x - 1$. Zapišemo lahko naslednji razcep:

$$4x^3 - 12x^2 + 10x - 2 = 2 \cdot (x-1) \cdot (2x^2 - 4x + 1) = 0$$

S pomočjo formule za ničli kvadratne enačbe poiščemo še ničli kvadratnega polinoma:

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4}$$

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4}$$

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Dobimo tri stacionarne točke funkcije $d(x)$:

$$T_1(x_1, f(x_1)) = T_1(1, f(1)) = T_1(1, 2)$$

$$T_2(x_2, f(x_2)) = T_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, f(\frac{2+\sqrt{2}}{2})) = T_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 4+\sqrt{2})$$

$$T_3(x_3, f(x_3)) = T_3(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, f(\frac{2-\sqrt{2}}{2})) = T_3(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 4-\sqrt{2})$$

Zdaj je potrebno le še ugotoviti, v kateri od teh treh točk funkcija $d(x)$ doseže minimum. V ta namen izračunamo drugi odvod funkcije $d(x)$:

$$\begin{aligned}
d''(x) = \frac{1}{2} \cdot \Bigg(& \frac{(4x^3 - 12x^2 + 10x - 2)' \cdot \sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}}{(\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1})^2} \\
& - \frac{(4x^3 - 12x^2 + 10x - 2) \cdot (\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1})'}{(\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1})^2} \Bigg) \\
= \frac{1}{2} \cdot \Bigg(& \frac{(12x^2 - 24x + 10) \cdot \sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1} \\
& - \frac{(4x^3 - 12x^2 + 10x - 2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^3 - 12x^2 + 10x - 2}{\sqrt{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1}}}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1} \Bigg)
\end{aligned}$$

Izračunajmo sedaj vrednosti drugega odvoda funkcije $d(x)$ v vsaki od treh stacionarnih točk. Pri $x_1 = 1$ je:

$$d''(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(12 - 24 + 10) \cdot \sqrt{1 - 4 + 5 - 2 + 1}}{1 - 4 + 5 - 2 + 1} - 0 \right) = -\frac{2}{2} < 0,$$

kar pomeni, da je v točki $T_1(1, 2)$ dosežen lokalni maksimum funkcije $d(x)$, kar nas ne zanima. Kaj se zgodi pri $x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ter $x_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$? Po daljšem računu dobimo, da je

$$d''(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}) > 0$$

ter tudi

$$d''(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}) > 0,$$

kar pomeni, da sta v točkah $T_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 4+\sqrt{2})$ in $T_3(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 4-\sqrt{2})$ dosežena minimuma funkcije $d(x)$.

Točki na grafu funkcije $f(x)$, ki sta najmanj oddaljeni od točke $A(1, 3)$, sta torej $T_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 4 + \sqrt{2})$ in $T_3(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 4 - \sqrt{2})$.

44. Kateri izmed pravokotnikov z danim obsegom 20 ima največjo ploščino?

Rešitev: Stranici pravokotnika označimo z a in b in ploščino zapišemo kot njuno funkcijo:

$$S(a, b) = a \cdot b.$$

Iščemo ekstrem (maksimum) te funkcije. To je funkcija dveh spremenljivk, a in b, zato se bo treba pred postopkom za določanje ekstrema ene spremenljivke znebiti. Tega se lotimo tako, da zapišemo dano količino (v tem primeru obseg) s spremenljivkama a in b:

$$2a + 2b = 20$$

$$a + b = 10$$

$$b = 10 - a$$

Dobili smo zvezo med stranicama pravokotnika a in b. S tako dobljeno zvezo lahko sedaj nadomestimo spremenljivko b v formuli za ploščino $S(a, b)$, ki bo tako postala funkcija ene same spremenljivke a:

$$S(a) = a \cdot (10 - a) = 10a - a^2.$$

Da bi našli ekstrem te funkcije, jo odvajamo in dobljeni odvod izenačimo z nič:

$$S'(a) = 10 - 2a.$$

$$10 - 2a = 0$$

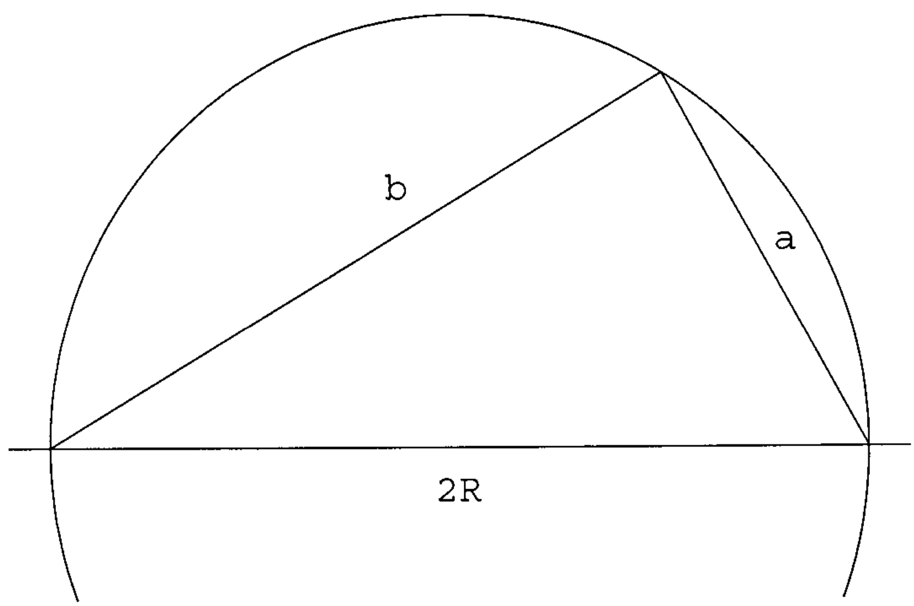
$$a = 5$$

$$b = 10 - a = 10 - 5 = 5$$

Ekstrem je dosežen pri $a = 5$, $b = 5$. Iskani pravokotnik je kvadrat.

45. V polkrog s polmerom R včrtamo pravokotni trikotnik tako, da njegova hipotenuza leži na premeru polkroga. Izračunaj kateti tistega takega trikotnika, ki ima največjo ploščino.

Rešitev: Skicirajmo si opisano situacijo:



Ploščino trikotnika zapišemo kot funkcijo neznanih katet a in b:

$$S(a, b) = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Poiskali bomo maksimum te funkcije, zato se najprej znebimo ene spremenljivke s pomočjo Pitagorovega izreka za trikotnik:

$$a^2 + b^2 = (2R)^2$$

$$b^2 = 4R^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

Ker je b dolžina ene od trikotnikovih stranic in kot dolžinska mera lahko že po naravi zavzame le pozitivno vrednost, nam pri korenjenju ni treba paziti na predznak, temveč vzamemo le pozitivni koren. Poleg tega lahko vidimo iz skice, da stranici a in b lahko zavzameta le vrednosti na intervalu $(0, 2a)$, torej pozitivni vrednosti. Ploščino S lahko sedaj zapišemo kot funkcijo ene same spremenljivke a:

$$S(a) = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{a}{2} \cdot (4R^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ploščino odvajamo po spremenljivki a:

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{1}{2} \cdot (4R^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}(4R^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (4R^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{2} \cdot (4R^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Zapišemo enačbo za stacionarne točke:

$$S'(a) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot (4R^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{2} \cdot (4R^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Enačbo pomnožimo z $2\sqrt{4R^2 - a^2}$ in dobimo

$$4R^2 - a^2 - a^2 = 0$$

$$4R^2 - 2a^2 = 0$$

$$2R^2 - a^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}R - a)(\sqrt{2}R + a) = 0$$

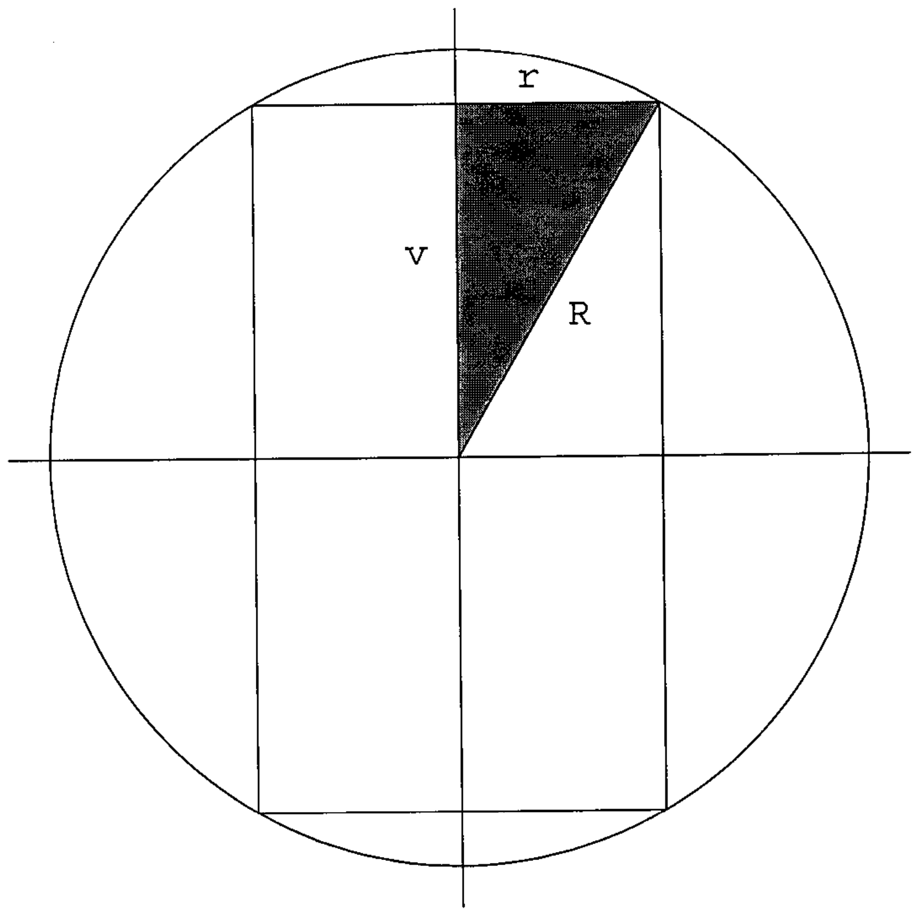
Iz tega dobimo dve rešitvi: $a_1 = \sqrt{2}R$ in $a_2 = -\sqrt{2}R$. Ker iščemo dolžino stranice trikotnika, bo za nas prišla v poštev le pozitivna rešitev a_1. Izračunamo še dolžino druge katete b:

$$b = \sqrt{4R^2 - (\sqrt{2}R)^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R.$$

Največjo ploščino ima torej enakokraki pravokotni trikotnik s katetama dolžine $a = b = \sqrt{2}R$.

46. V kroglo s polmerom R včrtamo valj. Določi tak valj, ki ima največjo prostornino.

Rešitev: Skicirajmo si navpični centralni prerez krogle in valja.



Polmer valja označimo z r, njegovo višino pa z $2v$. Iz skice vidimo, da neznanki r in v zavzameta vrednosti na intervalu $(0, R)$, kar pomeni, da bosta pozitivni. Izračunajmo prostornino valja:

$$V(r, v) = \pi \cdot r^2 \cdot 2v.$$

Da bi se rešili ene izmed spremenljivk r in v, zapišemo geometrijsko zvezo med r, R in v:

$$r^2 + v^2 = R^2$$

Izrazimo $r^2 = R^2 - v^2$ in to upoštevamo v izrazu za prostornino, ki tako postane funkcija le še ene same spremenljivke v:

$$V(v) = \pi \cdot (R^2 - v^2) \cdot 2v = 2\pi R^2 v - 2\pi v^3.$$

Prostornino odvajamo po spremenljivki v:

$$V'(v) = 2\pi R^2 - 6\pi v^2.$$

Odvod izenačimo z nič:

$$2\pi R^2 - 6\pi v^2 = 0$$

$$R^2 - 3v^2 = 0$$

$$v^2 = \frac{R^2}{3}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{R^2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}R$$

Ker je v polovična višina valja in torej dolžinska mera ali pa zaradi omejitve vrednosti neznanke v (glej začetek naloge) , pride v poštev le pozitivna rešitev $v = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. Izračunamo še polmer valja:

$$r^2 = R^2 - v^2 = R^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3}R)^2 = \frac{2}{3}R^2$$

Spet vzamemo pozitivno rešitev te enačbe, saj je r polmer valja in kot tak dolžinska mera, ki je vedno pozitivna:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R = \frac{\sqrt{6}}{3}R$$

Valj z največjo prostornino ima torej polmer $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$ in višino $2v = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Poglavje 6

Nedoločeni integral

Pravila integriranja:

1. integral vsote ali razlike dveh funkcij:
$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. integral funkcije, pomnožene s konstanto λ:
$$\int (\lambda \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. uvedba nove spremenljivke $x = g(t)$:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. integriranje per partes (po delih):
$$\int u(x) \cdot \mathrm{d}v(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot \mathrm{d}u(x).$$

Tabela integralov elementarnih funkcij:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1. \qquad \int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C. \qquad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C. \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C. \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \mathrm{ch}x \,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C. \qquad \int \mathrm{sh}x \,\mathrm{d}x = \mathrm{ch} + Cx.$$

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C$$

1. S pomočjo tabele elementarnih integralov reši naslednji integral:

$$\int (4-x^2)(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Dvočlenika v izrazu pod integralom zmnožimo, nato pa vsak člen tako dobljenega polinoma posebej integriramo:

$$\begin{aligned}\int(4-x^2)(1+x)\,\mathrm{d}x &= \int(4-x^2+4x-x^3)\,\mathrm{d}x\\ &= 4x-\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C\\ &= -\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2+4x+C.\end{aligned}$$

2. S pomočjo tabele elementarnih integralov reši naslednji integral:

$$\int(1-\frac{1}{x})\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Spet zmnožimo vse člene v izrazu pod integralom, nato vse člene zapišemo kot potence, da lažje integriramo vsak člen posebej:

$$\begin{aligned}\int(1-\frac{1}{x})\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int(1-x^{-1})(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int(1-x^{-1})x^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C\\ &= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.\end{aligned}$$

3. Reši integral s pomočjo tabele elementarnih integralov:

$$\int\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Tangens zapišemo kot kvocient sinusa in kosinusa. Nato iz znane trigonometrične enakosti

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

izrazimo $\sin^2 x$ in ga v integralu ustrezno nadomestimo. Dobljeni ulomek razdelimo na vsoto dveh ulomkov, od katerih vsakega posebej integriramo s pomočjo tabele elementarnih integralov.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x - x + C.\end{aligned}$$

4. S pomočjo uvedbe nove spremenljivke reši integral:

$$\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Za novo spremenljivko vzamemo imenovalec izraza pod integralom: $t = 2x+3$. Ta nastavek odvajamo in dobimo $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$, oziroma $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$. Sedaj v integralu x in $\mathrm{d}x$ ustrezno zamenjamo s t in $\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Tako dobljeni integral rešimo s pomočjo tabele elementarnih integralov. Nato opravimo še obratno zamenjavo, kar pomeni, da t zamenjamo z $2x+3$. Na koncu v izrazu namesto nove spremenljivke t spet nastopa originalna spremenljivka x:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$$

5. Reši integral tako, da uvedeš novo spremenljivko:

$$\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Nova spremenljivka bo izraz pod korenom: $t = x^2+1$. Z odvajanjem dobimo $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ in iz tega izrazimo $x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$. Dobljeni produkt ($x\,\mathrm{d}x$) nastopa v integralu in ga lahko v celoti zamenjamo, ne da bi bilo treba iz nastavka za novo spremenljivko t še računati, koliko je x. Nato integriramo in na koncu spremenljivko t spet ustrezno zamenjamo z x^2+1:

$$\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \int \sqrt{t}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$$

6. Z uvedbo nove spremenljivke reši integral:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Za novo spremenljivko vzamemo $t = e^{2x}$. Odvajamo: $\mathrm{d}t = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x$ in iz tega odvoda izrazimo produkt, ki že nastopa v števcu izraza pod integralom: $e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x} + C.$$

7. Z uvedbo nove spremenljivke reši integral:

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$$

Rešitev: Tangens zapišemo kot kvocient sinusa in kosinusa. Če za novo spremenljivko vzamemo $\cos x$, bomo s tem izraz iz števca (to je $\sin x\,\mathrm{d}x$) dobili že pri odvodu nove spremenljivke: $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$ oziroma $\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C.$$

8. Reši integral z uvedbo nove spremenljivke:

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Iz istega razloga kot pri prejšnji nalogi se splača vzeti za novo spremenljivko $t = \cos x$. Tedaj je $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$ oziroma $\sin x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Sedaj izraz pod integralom zapišemo drugače in sicer tako, da posebej delimo polinoma:

$$\begin{array}{rl} t^2 & : \ (t^2+1) = 1 - \frac{1}{t^2+1} \\ -(t^2+1) & \\ \hline -1 & \end{array}$$

Kvocient je $k(x) = 1$, ostanek pa $o(x) = -1$. Rezultat deljenja sedaj upoštevamo v integralu, tako da prejšnji ulomek zapišemo kot $k(x) + \frac{o(x)}{1+t^2}$:

$$= -\int (1 - \frac{1}{1+t^2})\,\mathrm{d}t = -t + \operatorname{arctg} t + C$$

Sedaj novo spremenljivko t le še zamenjamo s $\cos x$, da v izrazu spet nastopa originalna spremenljivka x:

$$= -\cos x + \operatorname{arctg}(\cos x) + C.$$

9. Z uvedbo nove spremenljivke reši integral:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Nova spremenljivka bo $t = \ln x$, zato, da bomo člen $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ dobili že v njenem odvodu: $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t + C = \ln(\ln x) + C.$$

10. Z uvedbo nove spremenljivke reši integral:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Za novo spremenljivko vzamemo $t = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Odvajamo:

$$t = \operatorname{arctg}\sqrt{x} = \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

$$2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

Izvršimo zamenjavo v integralu:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\,\mathrm{d}x = 2\int t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{t^2}{2}+C = t^2+C = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2+C.$$

11. Vemo, da je nedoločeni integral funkcije $f(x)$ enak funkciji $g(x)$, se pravi:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = g(x)+C.$$

S pomočjo tega podatka določi vrednost naslednjega integrala:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x,$$

kjer sta a in b poljubni realni števili in $a \neq 0$.

Rešitev: Nalogo rešimo tako, da vpeljemo novo spremenljivko $t = ax+b$, $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x$ oziroma $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{a}$:

$$\begin{aligned}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x &= \int f(t)\frac{\mathrm{d}t}{a} = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}g(t)+C\\ &= \frac{1}{a}g(ax+b)+C\end{aligned}$$

S to formulo si dostikrat pomagamo v primerih, kjer je potrebno hitro integriranje, da se izognemo dolgotrajnemu vstavljanju nove spremenljivke.

12. Z uporabo prejšnje naloge izračunaj integral:

$$\int \sin(3x-1)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vemo, da je:

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

Iščemo integral sinusa z argumentom $3x-1$, se pravi, da lahko v formulo iz prejšnje naloge vstavimo $a=3$ in $b=-1$. Dobimo:

$$\int \sin(3x-1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C.$$

13. S pomočjo integracije per partes reši integral:

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Izraz pod integralom je produkt polinoma in eksponentne funkcije. Izberemo si člen produkta, ki bo v per partes formuli predstavljal u in ga bomo odvajali. Za ta člen se splača vzeti polinomski faktor izraza pod integralom (x^2), ker ga bomo z odvajanjem poenostavili (zmanjšali mu bomo stopnjo za ena). Vse ostalo vzamemo za člen $\mathrm{d}v$. Dobimo:

$$u = x^2,\ \mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Sedaj u odvajamo, $\mathrm{d}v$ pa integriramo (lahko uporabimo postopek hitre integracije iz predprejšnje naloge):

$$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Tako dobljena člena vstavimo v formulo za integracijo per partes:

$$\int u\,\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\,\mathrm{d}u.$$

in dobimo

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x} \cdot x^2}{2} - \int e^{2x} \cdot x\,\mathrm{d}x.$$

Dobljeni integral je spet produkt polinoma in eksponentne funkcije, se pravi, da na njem še enkrat izvedemo postopek per partes. Za u vzamemo polinomski faktor, za $\mathrm{d}v$ vse ostalo:

$$u = x,\ \mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Ko dopolnimo ta drugi per partes korak, nam v izrazu ostane le še integral eksponentne funkcije, ki ga znamo izračunati s pomočjo tabele elementarnih integralov.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2x} \cdot x^2}{2} - \int e^{2x} \cdot x\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{2x} \cdot x^2}{2} - \left(x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \frac{x \cdot e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \frac{x \cdot e^{2x}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{2x} + C \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + C.
\end{aligned}$$

14. S pomočjo integracije per partes reši integral:

$$\int 3x \cdot \cos(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Izraz pod integralom je produkt polinoma in neke druge funkcije (tokrat kosinusa). V takem primeru največkrat vzamemo polinom za člen, ki ga bomo pri per partes postopku odvajali (to je za u), preostanek pa za člen, ki ga bomo integrirali (to je $\mathrm{d}v$):

$$u = 3x,\ \mathrm{d}v = \cos(3x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x,\ v = \frac{1}{3}\sin(3x).$$

Z upoštevanjem per partes formule pridemo tako do elementarnega integrala, ki ga znamo izračunati.

$$\begin{aligned}\int 3x \cdot \cos(3x)\, dx &= 3x \cdot \frac{1}{3}\sin(3x) - \int 3 \cdot \frac{1}{3}\sin(3x)\, dx \\ &= x \cdot \sin(3x) - \int \sin(3x)\, dx \\ &= x \cdot \sin(3x) + \frac{1}{3}\cos(3x) + C.\end{aligned}$$

15. S pomočjo integracije per partes reši integral:

$$\int (x^2 + x) \cdot \ln x\, dx.$$

Rešitev: Izraz pod integralom je polinom, pomnožen z naravnim logaritmom. Če bi postopali kot v prejšnjih dveh primerih in bi polinom vzeli za člen u v per partes postopku, bi morali za dv vzeti logaritem, ki bi ga nato morali integrirati. Vendar integrala naravnega logaritma s pomočjo elementarnih integralov ne znamo izračunati. Znamo pa logaritem odvajati, zato tu izjemoma vzamemo za člen u kar logaritem, za dv pa polinom:

$$u = \ln x,\ dv = (x^2 + x)\, dx \implies du = \frac{1}{x}\, dx,\ v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}.$$

Po opravljenem per partes postopku izraz pod integralom vsebuje le še potence spremenljivke x in ga z lahkoto členoma integriramo:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x) \cdot \ln x\, dx &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\ln x - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right) + C \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

16. S pomočjo integracije per partes reši integral:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Tu je vseeno, kaj vzamemo za u in kaj za $\mathrm{d}v$. Vzemimo na primer takole:

$$u = e^{2x},\ \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}u = 2e^{2x} \, \mathrm{d}x,\ v = \sin x.$$

Dobimo:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = e^{2x} \cdot \sin x - 2 \int e^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Na dobljenem integralu še enkrat izvršimo per partes postopek, s tem da tokrat za funkciji u in v izberemo enako kot v prejšnjem per partes koraku:

$$u = e^{2x},\ \mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}u = 2e^{2x} \, \mathrm{d}x,\ v = -\cos x.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} & e^{2x} \cdot \sin x - 2 \int e^{2x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \\ & \quad = e^{2x} \cdot \sin x - 2(-e^{2x} \cdot \cos x + 2 \int e^{2x} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Prišli smo do enakega integrala, kot smo ga imeli na začetku, zato z nadaljnjim per partes integriranjem ne bomo ničesar dosegli, temveč bi se le vrteli v krogu od sinusa preko kosinusa in nazaj do sinusa. Lahko pa iskani začetni integral označimo z I in prvi in zadnji dobljeni izraz vzamemo kot enačbo. Tedaj dobimo:

$$I = e^{2x} \cdot \sin x - 2(-e^{2x} \cdot \cos x + 2I)$$

Dobili smo linearno enačbo za neznanko I. Rešimo jo:

$$\begin{aligned} I &= e^{2x} \cdot \sin x + 2e^{2x} \cdot \cos x - 4I \\ 5I &= e^{2x} \cdot \sin x + 2e^{2x} \cdot \cos x \\ I &= \frac{e^{2x} \cdot (\sin x + 2\cos x)}{5} \end{aligned}$$

Naloga je skoraj rešena, manjka nam le še vselej prisotna konstanta pri nedoločenem integralu. Iskani integral je torej enak:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{e^{2x} \cdot (\sin x + 2\cos x)}{5} + C.$$

17. S pomočjo integracije per partes reši integral:

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Funkcije $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ne znamo integrirati, znamo pa jo odvajati, zato jo v per partes postopku vzamemo za člen u:

$$u = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \ \mathrm{d}v = \ \mathrm{d}x \Longrightarrow \ \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1+x)} \, \mathrm{d}x, \, v = x.$$

Integriramo:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x &= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{x}{2\sqrt{x} \cdot (1+x)} \, \mathrm{d}x \\
&= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

V tako dobljeni integral vpeljemo novo spremenljivko $t^2 = x$, $2t \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
&= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2} \cdot 2t \, \mathrm{d}t = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \frac{t^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \, \mathrm{d}t = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - t + \operatorname{arctg} t + C \\
&= x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C = (x+1) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

18. Reši integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x} \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Racionalna funkcija je funkcija oblike $\frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma. Če je stopnja polinoma $p(x)$ v števcu podintegralske funkcije večja ali enaka stopnji polinoma $q(x)$ v imenovalcu, izraz najprej poenostavimo tako, da polinoma $p(x)$ in $q(x)$ delimo: pri tem dobimo kvocient $k(x)$ in ostanek $o(x)$ ter racionalno funkcijo zapišemo na naslednji način:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{o(x)}{q(x)}.$$

V našem primeru je $p(x) = x^2+1$, $q(x) = x^2+x$. Ko ju delimo, dobimo:

$$\begin{array}{rcl} (x^2+1) & : & (x^2+x) = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} \\ -(x^2+x) & & \\ \hline -x+1 & & \end{array}$$

Kvocient je $k(x) = 1$, ostanek pa $o(x) = -x+1$, kar upoštevamo v integralu:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1 + \frac{-x+1}{x^2+x}\right)\mathrm{d}x = x + \int \frac{-x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \\ &= x + \int \frac{-x+1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

V tako dobljenem preostalem integralu je stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu. Take integrale rešujemo z razcepom integrirane funkcije na parcialne ulomke: namesto ulomka s polinomom višje stopnje v imenovalcu želimo imeti vsoto dveh (ali več, odvisno od stopnje polinoma v imenovalcu racionalne funkcije) ulomkov z linearnimi polinomomi v imenovalcu. V našem primeru bosta ulomka dva, ker je v imenovalcu originalne funkcije kvadraten polinom (se pravi polinom stopnje 2). Zapišemo nastavek, kjer v števca ulomkov z linearnima polinomoma v imenovalcu postavimo za zdaj še neznani konstanti A in B:

$$\frac{-x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

Enačbo ustrezno pomnožimo, tako da se znebimo ulomkov:

$$\frac{-x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \bigg/ \cdot x(x+1)$$

$$-x+1 = A(x+1) + Bx$$

$$-x+1 = Ax + A + Bx$$

Na obeh straneh enačbe imamo polinoma spremenljivke x, ki sta enaka natanko tedaj, ko imata enake koeficiente pri istih potencah spremenljivke x. Izvedemo primerjavo koeficientov:

$$\begin{array}{lcl} \text{koeficient pri } x^1 & : & -1 = A + B \\ \text{koeficient pri } x^0 & : & 1 = A \end{array}$$

Dobili smo sistem dveh linearnih enačb za dve neznanki, A in B, katerega rešitev je $A = 1$ in $B = -2$. Člen pod integralom lahko sedaj zapišemo kot:

$$x + \int \frac{-x+1}{x(x+1)} \mathrm{d}x = x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right) \mathrm{d}x = x + \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x - 2 \int \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x$$

Ta integral brez težav do konca izračunamo s pomočjo znanih elementarnih integralov:

$$= x + \ln x - 2\ln(x+1) + C = x + \ln \frac{x}{(x+1)^2} + C.$$

19. Reši integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \mathrm{d}x.$$

Rešitev: Stopnja polinoma v števcu integrirane funkcije je manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, zato tako kot pri prejšnji nalogi uporabimo razcep na parcialna ulomka:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

Enačbo pomnožimo z $(x-1)(x-3)$, da se znebimo ulomkov:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \Bigg/ \cdot (x-1)(x-3)$$

$$1 = A(x-3) + B(x-1)$$
$$1 = Ax - 3A + Bx - B$$

Primerjamo koeficiente na obeh straneh enačbe pri istih potencah spremenljivke x, kar nam da sistem dveh linearnih enačb za neznanki A in B:

$$\begin{array}{lcl} \text{koeficient pri } x^1 & : & 0 = A + B \\ \text{koeficient pri } x^0 & : & 1 = -3A - B \end{array}$$

Iz prve enačbe sledi $B = -A$, kar vstavimo v drugo enačbo in dobimo $-2A = 1$. Torej je $A = -\frac{1}{2}$ in $B = \frac{1}{2}$. Ta rezultat uporabimo v integralu:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\, dx &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln(x-1) + \ln(x-3) \right) + C = \ln \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} + C. \end{aligned}$$

20. Reši integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{1}{x^4 + 4x^2}\, dx.$$

Rešitev: Razstavimo imenovalec izraza pod integralom:

$$\frac{1}{x^4 + 4x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+4)}$$

Dobili smo člen x^2 in pa v realnem nerazcepen člen $x^2 + 4$. Do rešitve si bomo spet pomagali z razcepom na parcialna ulomka, vendar bo tu nastavek drugačen, ker bosta v imenovalcih kvadratna in ne linearna polinoma. V števca iskanih dveh ulomkov postavimo namesto konstant splošna polinoma prve stopnje:

$$\frac{1}{x^2(x^2+4)} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \bigg/ \cdot x^2(x^2+4)$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)x^2$$

$$1 = Ax^3 + Bx^2 + 4Ax + 4B + Cx^3 + Dx^2$$

Primerjamo koeficiente pri vseh različnih potencah spremenljivke x, kar nam da sistem štirih linearnih enačb za štiri neznanke, A, B, C in D:

$$\begin{array}{lcl} \text{koeficient pri } x^3 & : & 0 = A + C \\ \text{koeficient pri } x^2 & : & 0 = B + D \\ \text{koeficient pri } x^1 & : & 0 = 4A \\ \text{koeficient pri } x^0 & : & 1 = 4B \end{array}$$

Sledi: $A = C = 0$, $B = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$. Ta rezultat uporabimo v integralu:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x^2} - \frac{\frac{1}{4}}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int x^{-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Prvi integral lahko sedaj takoj izračunamo (saj je podintegralska funkcija potenca spremenljivke x), drugi člen pa pred integriranjem še malo predelamo in sicer tako, da v imenovalcu izpostavimo 4 in nato vpeljemo novo spremenljivko $t = \frac{x}{2}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2}$ oziroma $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. S tem bomo dobili znan osnoven integral in brez težav do konca razrešili izraz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int x^{-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{4((\frac{x}{2})^2+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{16}\int \frac{1}{t^2+1}2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\, t + C = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

21. Reši integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: V tem primeru je polinom v imenovalcu podintegralske funkcije nerazcepen v realnih številih, tako da si z razcepom na parcialne ulomke ne moremo pomagati. Lahko pa vpeljemo novo spremenljivko: $t = x^4$, $\mathrm{d}t = 4x^3\,\mathrm{d}x$ oziroma $x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{4}$. Dobimo:

$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2+3}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t.$$

Sedaj v imenovalcu izpostavimo 3 in integral predelamo do te mere, da lahko vpeljemo še eno novo spremenljivko, tokrat $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$, $du = \frac{dt}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+3}\,dt &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{3((\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1)}\,dt = \frac{1}{12}\int \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{12}\int \frac{1}{u^2+1}\sqrt{3}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg} u + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

22. Reši integral:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx.$$

Rešitev: Najprej uporabimo postopek per partes:

$$u = \ln(x+1),\; dv = x^{-2}\,dx \Longrightarrow du = \frac{1}{x+1}\,dx,\; v = -x^{-1}.$$

Dobimo:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

Dobljeni integral v drugem delu izraza rešimo z razcepom na parcialna ulomka:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Big/ \cdot x(x+1)$$

$$1 = A(x+1) + Bx$$

$$1 = Ax + A + Bx$$

Primerjava koeficientov:

$$\begin{aligned}\text{koeficient pri } x^1 &: \quad 0 = A + B \\ \text{koeficient pri } x^0 &: \quad 1 = A\end{aligned}$$

Rešitev tako dobljenega sistema linearnih enačb je: $A = 1$, $B = -1$. Nadaljujmo z integriranjem:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln x - \ln(x+1) + C \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln\frac{x}{x+1} + C.
\end{aligned}
$$

23. Izračunaj integral:

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Uporabimo znano trigonometrično formulo za kosinus dvojnega kota:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

in sicer za $\alpha = \frac{x}{2}$. Se pravi, da je

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}.$$

Uporabimo še trigonometrični razcep števila 1 za kot $\frac{x}{2}$:

$$1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}.$$

Dobimo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}{1+(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - (\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + (\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x - x.
\end{aligned}
$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko $t = \frac{x}{2}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2}$ oziroma $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$:

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right) \mathrm{d}x - x = 2\int \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right) \mathrm{d}t - x = 2\mathrm{tg}\, t - x + C$$
$$= 2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - x + C.$$

24. Izračunaj integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Rešitev: Integrali, ki so racionalne funkcije spremenljivke x in enega od naslednjih korenov: $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ ali $\sqrt{1+x^2}$, se z uvedbo ustrezne nove spremenljivke prevedejo na integrale trigonometričnih funkcij. Z $R(x,y)$ označimo racionalno funkcijo spremenljivk x in y. Nova spremenljivka t je definirana na naslednji način:

a) za integral oblike $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$, vpeljemo $x = \sin t$ ali $x = \cos t$,

b) za integral oblike $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$, je $x = \mathrm{tg}\, t$ ali $x = \mathrm{ctg}\, t$,

c) za integral oblike $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$, pa je $x = \frac{1}{\cos t}$.

Naš integral spada v drugo skupino (pod točko b), zato uvedemo novo spremenljivko takole: $x = \mathrm{tg}\, t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{tg}^2 t \cdot \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} \cdot \cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cdot \cos^2 t}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t \cdot \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}.$$

Uvedemo še eno novo spremenljivko in sicer $u = \sin t$, $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\sin t} + C.$$

Sedaj moram ta izraz le še prevesti nazaj na spremenljivko x, kar storimo z uporabo naslednje trigonometrične enakosti:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$$

$$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha-1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Pri nas je $\alpha=t$ ter $x=\operatorname{tg}t$. Ko zgornjo enakost uporabimo v rezultatu integriranja, končno dobimo:

$$-\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}{\operatorname{tg}t}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

25. Reši integral:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x.$$

Uvedemo novo spremenljivko $t=\cos x$, $\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$ in dobimo:

$$\begin{aligned}\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x&=-\int\frac{(1-t^2)}{t^4}\,\mathrm{d}t=\int(-t^{-4}+t^{-2})\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C\\&=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.\end{aligned}$$

26. Reši integral:

$$\int\frac{\operatorname{arctg}e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko: $t=e^x$, $\mathrm{d}t=e^x\,\mathrm{d}x$ oziroma $\mathrm{d}t=t\cdot\,\mathrm{d}x$ ali kar $\frac{\mathrm{d}t}{t}=\,\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{\operatorname{arctg}e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\operatorname{arctg}t}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int\frac{\operatorname{arctg}t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tega integrala se lotimo s postopkom per partes:

$$u = \operatorname{arctg} t,\ \mathrm{d}v = t^{-2}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ v = -t^{-1}.$$

Dobimo:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Dobljeni integral je integral racionalne funkcije, ki ima v imenovalcu en linearen in en nerazcepen kvadratni člen. Pomagamo si z razcepom na parcialna ulomka:

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \Big/ \cdot t(1+t^2)$$

$$1 = A(1+t^2) + t(Bt+C)$$

$$1 = A + At^2 + Bt^2 + Ct$$

Primerjamo koeficiente na obeh straneh enačbe pri istih potencah spremenljivke t:

$$\begin{array}{lcl} \text{koeficient pri } t^2 & : & 0 = A + B \\ \text{koeficient pri } t^1 & : & 0 = C \\ \text{koeficient pri } t^0 & : & 1 = A \end{array}$$

Rešitev tako dobljenega sistema linearnih enačb je: $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$. Razcep sedaj upoštevamo v integralu:

$$\begin{aligned} -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko: $u = 1 + t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ oziroma $t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2}$.

$$\begin{aligned} -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \int \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \frac{1}{2}\ln u + C \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} + \ln e^x - \frac{1}{2}\ln(1+(e^x)^2) + C \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} + x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} + C. \end{aligned}$$

Poglavje 7

Določeni integral

Kako izračunamo *določeni integral*: če je nedoločeni integral funkcije $f(x)$ enak funkciji $g(x)$, se pravi:

$$\int f(x) = g(x) + C,$$

tedaj določeni integral funckcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ izračunamo takole:

$$\int_a^b f(x) = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a).$$

V praksi to pomeni, da najprej izračunamo nedoločeni integral, nato pa v dobljeni izraz vstavimo obe meji in odštejemo tako dobljeni vrednosti:

Za določeni integral veljajo enaka pravila integriranja kot za nedoločeni integral:

1. integral vsote ali razlike dveh funkcij:
$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$
2. integral funkcije, pomnožene s konstanto λ:
$\int_a^b (\lambda \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
3. uvedba nove spremenljivke $x = g(t)$:
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$

4. integriranje per partes (po delih):
$$\int_a^b u(x)\cdot \mathrm{d}v(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot \mathrm{d}u(x).$$

1. Izračunaj določeni integral:
$$\int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Izračunajmo določeni integral po zgoraj omenjenem postopku - najprej izračunajmo nedoločeni integral, nato pa v dobljeni izraz vstavimo obe meji in odštjemo tako dobljeni vrednosti:
$$\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-1}^{3}$$
$$= \left(\frac{3^3}{3}-3^2-3\cdot 3\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3\cdot(-1)\right) = -\frac{32}{3}.$$

2. Izračunaj določeni integral:
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = 3x$, $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$. Pri tem moramo biti pazljivi in spremeniti tudi meji integriranja, kar storimo glede na meji originalne spremenljivke x. Spodnja meja: če je $x = 0$, je vrednost spodnje meje za novo spremenljivko enaka $t = 0$. Zgornja meja: če je $x = \frac{\pi}{3}$, pa je $t = \pi$. Nato integriramo kot običajno: izračunamo nedoločeni integral, vanj vstavimo novi meji ter nazadnje odštejemo tako dobljeni vrednosti.
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(-\cos\pi+\cos 0)$$
$$= \frac{1}{3}(-(-1)+1) = \frac{2}{3}.$$

3. Izračunaj določeni integral:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = x^2+4$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ oziroma $x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$. Izračunamo tudi novi meji: če je $x = 0$, je $t = 4$. Če pa je $x = 1$, je $t = 5$.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\ln t\big|_4^5 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4) = \ln\sqrt{\frac{5}{4}} = \ln\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

4. Izračunaj določeni integral:

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = e^x$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$. Novi meji: če je $x = 0$, je $t = e^0 = 1$. Za $x = \ln\sqrt{3}$ pa je $t = e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t\big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1\\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

5. Izračunaj določeni integral:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Novi meji: če je $x = 1$, je $t = \ln 1 = 0$. Če pa je $x = e^\pi$, je $t = \ln e^\pi = \pi$.

$$\begin{aligned}\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t\big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0\\ &= -(-1) + 1 = 2.\end{aligned}$$

6. Izračunaj določeni integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x \, dx.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$. Novi meji: za $x = 0$ je $t = \sin 0 = 0$, za $x = \frac{\pi}{2}$ pa je $t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x \, dx = \int_0^1 t^2 \, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

7. Izračunaj določeni integral:

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x} \, dx.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{1}{x^2} \, dx$. Novi meji: če je $x = \frac{1}{\pi}$, je $t = \pi$. Zgornja meja $x = \frac{2}{\pi}$ pa vrne za novo spremenljivko vrednost $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x} \, dx = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt$$

Minus pred integralom nam obrne vrstni red mej:

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \, dt = -\cos t|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = -(-1) + 0 = 1.$$

8. Izračunaj določeni integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx.$$

Rešitev: Uporabimo formulo za integracijo per partes (po delih), ki se pri določenem integralu glasi takole:

$$\int_a^b u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x)|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot du(x).$$

Vzamemo:

$$u = x,\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = -\cos x.$$

Integriramo:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x &= -\,x\cdot\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.\end{aligned}$$

9. Izračunaj določeni integral:

$$\int_0^1 x^2\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Uporabimo postopek za integracijo per partes:

$$u = x^2,\ \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,\ v = -e^{-x}.$$

Dobimo:

$$\int_0^1 x^2\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2\cdot e^{-x}\big|_0^1 + 2\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Še enkrat izvedemo postopek per partes:

$$u = x,\ \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = -e^{-x}.$$

Sedaj dobimo:

$$\begin{aligned}&-x^2\cdot e^{-x}\big|_0^1 + 2\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2\cdot e^{-x}\big|_0^1 + 2(-x\cdot e^{-x}\big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x) \\ &= -x^2\cdot e^{-x}\big|_0^1 + 2\left(-x\cdot e^{-x}\big|_0^1 + -e^{-x}\big|_0^1\right) \\ &= -x^2\cdot e^{-x}\big|_0^1 - 2x\cdot e^{-x}\big|_0^1 - 2\,e^{-x}\big|_0^1 \\ &= -1^2\cdot e^{-1} - 0^2\cdot e^{-0} - 2\cdot 1\cdot e^{-1} - 2\cdot 0\cdot e^{-0} - 2e^{-1} + 2e^{-0} \\ &= 2 - \frac{5}{e}.\end{aligned}$$

10. Izračunaj določeni integral:

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \cdot \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko: $t = \frac{1}{x}$, $\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Novi meji: spodnja meja stare spremenljivke $x = \frac{1}{\pi}$ nam da za spodnjo mejo nove spremenljivke $t = \pi$. Če pa je $x = \frac{2}{\pi}$, je zgornja meja nove spremenljivke tedaj $t = \frac{\pi}{2}$. Nato s pomočjo minusa pred integralom obrnemo novi meji v pravilen vrstni red:

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \cdot \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Tako dobljeni integral rešimo z integracijo per partes:

$$u = t,\ \mathrm{d}v = \cos t\,\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}t,\ v = \sin t.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t &= t\cdot\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = t\cdot\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &= (\pi\cdot\sin\pi - \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}) + (\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2})\\ &= 0 - \frac{\pi}{2} + (-1) - 0 = -\frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

11. Izračunaj $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$, kjer je funkcija $f(x)$ podana takole:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & ;\quad |x| \le 1\\ -|x|+1 & ;\quad |x| > 1\end{cases}.$$

Rešitev: Funkcijo $f(x)$ zapišemo brez absolutnih vrednosti:

$$f(x) = \begin{cases} -|x|+1 & ;\quad x < -1\\ -x^2+1 & ;\quad -1 \le x \le 1\\ -|x|+1 & ;\quad x > 1\end{cases} = \begin{cases} x+1 & ;\quad x < -1\\ -x^2+1 & ;\quad -1 \le x \le 1\\ -x+1 & ;\quad x > 1\end{cases}.$$

Integral bomo razdelili na več posameznih integralov. Razdelili ga bomo v točkah, kjer se predpis funkcije spremeni, se pravi pri -1 in 1.

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1} (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (-x+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{-x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{1}^{2} \\
&= \left(\frac{(-1)^2}{2}-1\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2}-2\right) + \left(-\frac{1^3}{3}+1\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3}-1\right) \\
&\quad + \left(-\frac{2^2}{2}+2\right) - \left(-\frac{1^2}{2}+1\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

12. Izračunaj integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(3+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: Ko računamo nedoločeni integral, upoštevamo, da imamo v racionalni funkciji pod integralom v imenovalcu dva v realnem nerazcepna člena. Pomagamo si z razcepom na parcialna ulomka, česar se lotimo z naslednjim nastavkom:

$$\frac{1}{(1+x^2)(3+x^2)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{3+x^2}$$

Enačbo pomnožimo tako, da se znebimo ulomkov:

$$\frac{1}{(1+x^2)(3+x^2)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{3+x^2} \Big/ \cdot (1+x^2)(3+x^2)$$

$$1 = (Ax+B)(3+x^2) + (Cx+D)(1+x^2)$$

$$1 = Ax^3 + Bx^2 + 3Ax + 3B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D$$

Primerjava koeficientov:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{koeficient pri } x^3 & : & 0 = A + C \\
\text{koeficient pri } x^2 & : & 0 = B + D \\
\text{koeficient pri } x^1 & : & 0 = 3A + C \\
\text{koeficient pri } x^0 & : & 1 = 3B + D
\end{array}
$$

Rešimo dobljeni sistem štirih linearnih enačb in dobimo: $A = C = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$. Sedaj lahko integral razdelimo na dva integrala, od katerih lahko prvega takoj razrešimo:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(3+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{3+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{3(1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

V še nerazrešeni integral vpeljemo novo spremenljivko: $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3}}$. Novi meji: če je $x = 0$, je $t = 0$. Če pa je $x = \infty$, je $t = \infty$. Dobimo:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty - \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty - \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}(\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0) - \frac{\sqrt{3}}{6}(\lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) - \frac{\sqrt{3}}{6}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} = \frac{\pi}{4}(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}).\end{aligned}$$

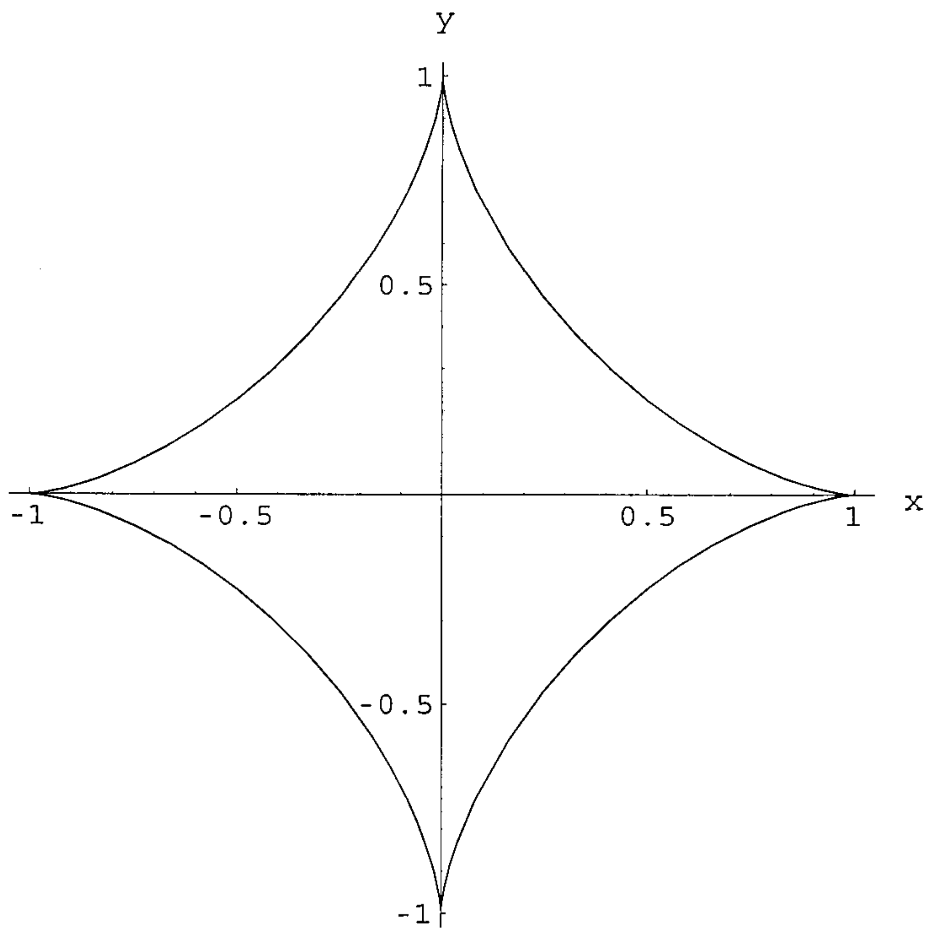
13. Astroida je krivulja, podana z naslednjo enačbo:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

oziroma

$$y = \pm(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Njen graf izgleda takole:



Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje astroida.

Rešitev: *Ploščina lika, omejenega z astroido*:

Ploščino med dano funkcijo $y(x)$ in osjo x na intervalu $[a, b]$ dobimo kot določeni integral te funkcije na danem intervalu:

$$S = \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x.$$

Astroida je simetrična na obe osi, x in y, zato lahko njeno ploščino izračunamo tako, da jo razdelimo na štiri zrcalne dele in izračunamo ploščino le enega samega dela (npr. dela iz prvega kvadranta, kar označimo s S_1), nato pa to pomnožimo s 4. Velja:

$$S = 4 \cdot S_1$$

Del astroide v prvem kvadrantu ima enačbo:

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

To sedaj upoštevamo pri računanju ploščine S_1:

$$S_1 = \int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

V ta integral uvedemo novo spremenljivko: $t^3 = x$, $3t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Novi meji: če je $x = 0$, je $t = 0$. Za $x = 1$ pa je $t = 1$.

$$= 3\int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} t^2\,\mathrm{d}t$$

Uvedemo še eno novo spremenljviko: $t = \sin u$, $\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u$. Novi meji: za $t = 0$ je $u = 0$, za $t = 1$ pa $u = \frac{\pi}{2}$.

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin^2 u \cdot \cos u\,\mathrm{d}u = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin^2 u \cdot \cos u\,\mathrm{d}u$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \cdot \sin^2 u\,\mathrm{d}u$$

V integralu uporabimo naslednji dve formuli za kotne funkcije dvojnih kotov:

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u$$

ter

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

in dobimo:

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2u \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)\,\mathrm{d}u = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u \cdot (1 + \cos 2u)\,\mathrm{d}u$$

Uvedemo še eno novo spremenljivko: $s = 2u$, $\mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}u$. Spet pazimo na novi meji: če je $u = 0$, je $s = 0$. Za $u = \frac{\pi}{2}$ pa dobimo $s = \pi$.

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi} \sin^2 s \cdot (1 + \cos s)\,\mathrm{d}s = \frac{3}{16}\int_0^{\pi} \sin^2 s\,\mathrm{d}s + \frac{3}{16}\int_0^{\pi} \sin^2 s \cdot \cos s\,\mathrm{d}s$$

V prvem integralu uporabimo še naslednjo trigonometrično formulo:

$$\sin^2 s = \frac{1 - \cos 2s}{2}.$$

Nadaljujemo z računanjem integrala:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{16}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2s}{2}\right)\mathrm{d}s + \frac{3}{16}\int_0^{\pi}\sin^2 s\cdot\cos s\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{3}{32}\int_0^{\pi}\mathrm{d}s - \frac{3}{32}\int_0^{\pi}\cos 2s\,\mathrm{d}s + \frac{3}{16}\int_0^{\pi}\sin^2 s\cdot\cos s\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Tretji integral v tej vsoti vsebuje funkcijo $\sin^2 s\cdot\cos s$, ki je na intervalu $[0,\pi]$ simetrična glede na središčno točko tega intervala ($x=\frac{\pi}{2}$). Zato je ta integral enak nič. Če tega ne opazimo, ga izračunamo z uvedo nove spremenljivke in ravno tako dobimo nič. Prva dva integrala lahko takoj izračunamo:

$$
= \frac{3}{32}\,s\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{32}\cdot\frac{1}{2}\sin 2s\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{32}(\pi-0) - \frac{3}{64}(\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{3\pi}{32}
$$

Izračunamo še celotno ploščino lika, ki ga omejuje astroida:

$$
S = 4\cdot S_1 = 4\cdot\frac{3\pi}{32} = \frac{3\pi}{8}.
$$

14. Izračunaj obseg lika, ki ga omejuje astroida. Defincijo astroide najdeš v prejšnji nalogi.

Rešitev: *Obseg lika, omejenega z astroido*:

Dolžino loka zvezne odvedljive funkcije $y(x)$ na intervalu $[a,b]$ izračunamo po naslednji formuli:

$$
s = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x.
$$

V primeru astroide lahko zaradi simetrije na obe osi spet računamo le dolžino enega samega loka (iz prvega kvadranta, označimo ga s s_1), ki ga nato pomnožimo s 4, da dobimo obseg o:

$$
o = 4\cdot s_1
$$

$$
s_1 = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x
$$

Potrebujemo odvod astroide. Na intervalu $[0, 1]$ je astroida dana s formulo:

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Odvajamo:

$$y' = \frac{3}{2}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Ta odvod sedaj upoštevamo v formuli za dolžino loka:

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^1 \sqrt{1 + (-(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}})^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + 1 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x^{-\frac{2}{3}}}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^1 = \frac{3}{2}\left(1^{\frac{2}{3}} - 0^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Obseg astroide je torej:

$$o = 4 \cdot s_1 = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6.$$

15. Izračunaj še površino in prostornino rotacijskega telesa, ki nastane, če astroido zavrtimo okoli x-osi.

Rešitev:

a) *Prostornina rotacijskega telesa*

Prostornino rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo $y(x)$ na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli x-osi, izračunamo po naslednji formuli:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Astroida je simetrična na x os, zato lahko telo generiramo tako, da vrtimo le zgornjo polovico te krivulje. Ker je astroida simetrična tudi na y-os, lahko izračunamo le prostornino, ki jo pri vrtenju generira krivulja iz prvega kvadranta (to prostornino označimo z V_1) in nato to pomnožimo z 2, da dobimo prostornino celotnega telesa.

$$V = 2 \cdot V_1.$$

Astroida v prvem kvadrantu ima enačbo:

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Krivuljo vnesemo v formulo za prostornino rotacijskega telesa.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 \left((1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^3 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 (1 - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \left(x - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3 \cdot \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \pi \left(1 - \frac{9}{5} + \frac{9}{7} - \frac{1}{3} \right) = \frac{16\pi}{105}. \end{aligned}$$

Iskana prostornina vrtenine je torej:

$$V = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot \frac{16\pi}{105} = \frac{32\pi}{105}.$$

b) *Površina rotacijskega telesa*

Površino rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo $y(x)$ na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli x-osi, izračunamo po naslednji formuli:

$$P = 2\pi \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Pri telesu, ki ga generira astroida, spet upoštevamo simetričnost na obe osi in vzamemo za y krivuljo iz prvega kvadranta. Površino rotacijskega telesa, dobljenega z rotacijo krivulje iz prvega kvadranta, označimo z P_1. Tedaj je:

$$P = 2 \cdot P_1.$$

$$P_1 = 2\pi \int_0^1 y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Astroida v prvem kvadrantu ima formulo (kot že poprej):

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},$$

njen odvod pa je (glej prejšnjo nalogo):

$$y' = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Krivuljo $y(x)$ in njen odvod $y'(x)$ vnesemo v formulo za površino rotacijskega telesa in dobimo:

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\pi \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 + (-(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}})^2}\, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Vpeljemo novo spremenljivko: $t = 1 - x^{\frac{2}{3}}$, $\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x$. Novi meji: za $x = 0$ je $t = 1$, za $x = 1$ pa $t = 0$.

$$= -2\pi \frac{3}{2} \int_1^0 t^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}t = 2\pi \frac{3}{2} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}t = 3\pi\, \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{6\pi}{5}.$$

Površina rotacijskega telesa, ki ga določa astroida, je:

$$P = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot \frac{6\pi}{5} = \frac{12\pi}{5}.$$

16. Kolikšna je ploščina lika, ki ga omejujeta abscisna os in lok krivulje $y = x \cdot \sin 2x$ med koordinatnim izhodiščem in njeno najmanjšo pozitivno ničlo?

Rešitev: Izračunamo najmanjšo pozitivno ničlo funkcije:

$$x \cdot \sin 2x = 0$$

Enačba ima dve rešitvi: $x_1 = 0$, ki ne pride v poštev, ker ni pozitivna in $x_2 = \frac{k\pi}{2}$, kjer je k poljubno celo število. Najmanjšo pozitivno ničlo dobimo za $k = 1$, se pravi $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Iskano ploščino izračunamo kot določeni integral dane funkcije na intervalu $[x_1, x_2] = [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x\, \mathrm{d}x$$

Ta integral izračunamo s postopkom per partes:

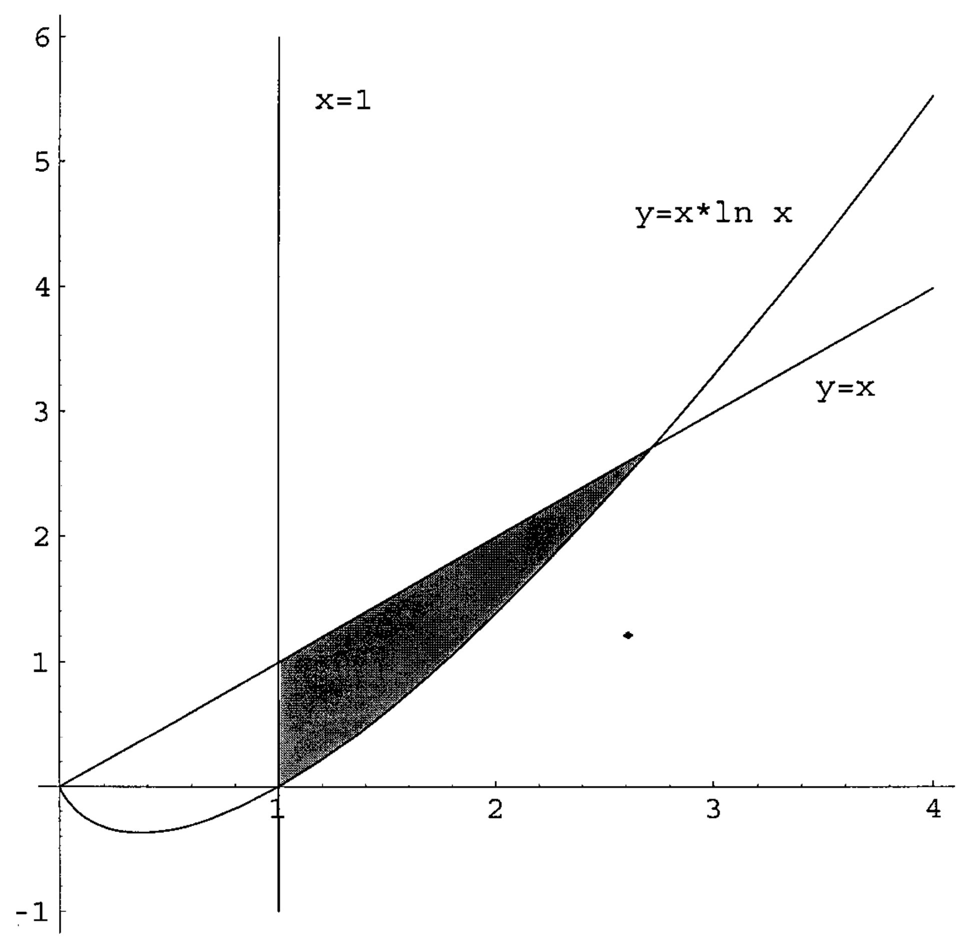
$$u = x,\ \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}\cos\pi + \frac{0}{2}\cos 0 + \frac{1}{4}\sin\pi - \frac{1}{4}\sin 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

17. Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepajo krivulja $y = x \cdot \ln x$, premica $x = 1$ in simetrala lihih kvadrantov na območju, kjer je $x \geq 1$.

Rešitev: Poglejmo, o kakšnem liku govori naloga:



Iskano ploščino bomo dobili tako, da bomo od ploščine pod simetralo lihih kvadrantov $y = x$ (S_1) odšteli ploščino pod krivuljo $y = x \cdot \ln x$ (S_2).

Ti dve dobimo kot določena integrala ustreznih dveh krivulj na intervalu $[1, x_0]$, kjer je x_0 abscisa presečišča teh dveh krivulj. Izračunajmo x_0:

$$x = x \ln x$$

$$x(1 - \ln x) = 0$$

Dobimo dve rešitvi: $x_1 = 0$, ki nas ne zanima, ker gledamo le območje, kjer je $x \geq 1$, ter $x_0 = e$, ki je iskano presečišče na danem območju. Se pravi, da bomo integrirali na intervalu $[1, e]$.

$$S = S_1 - S_2 = \int_1^e x \, \mathrm{d}x - \int_1^e x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^e - \int_1^e x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Preostali integral rešimo z metodo per partes:

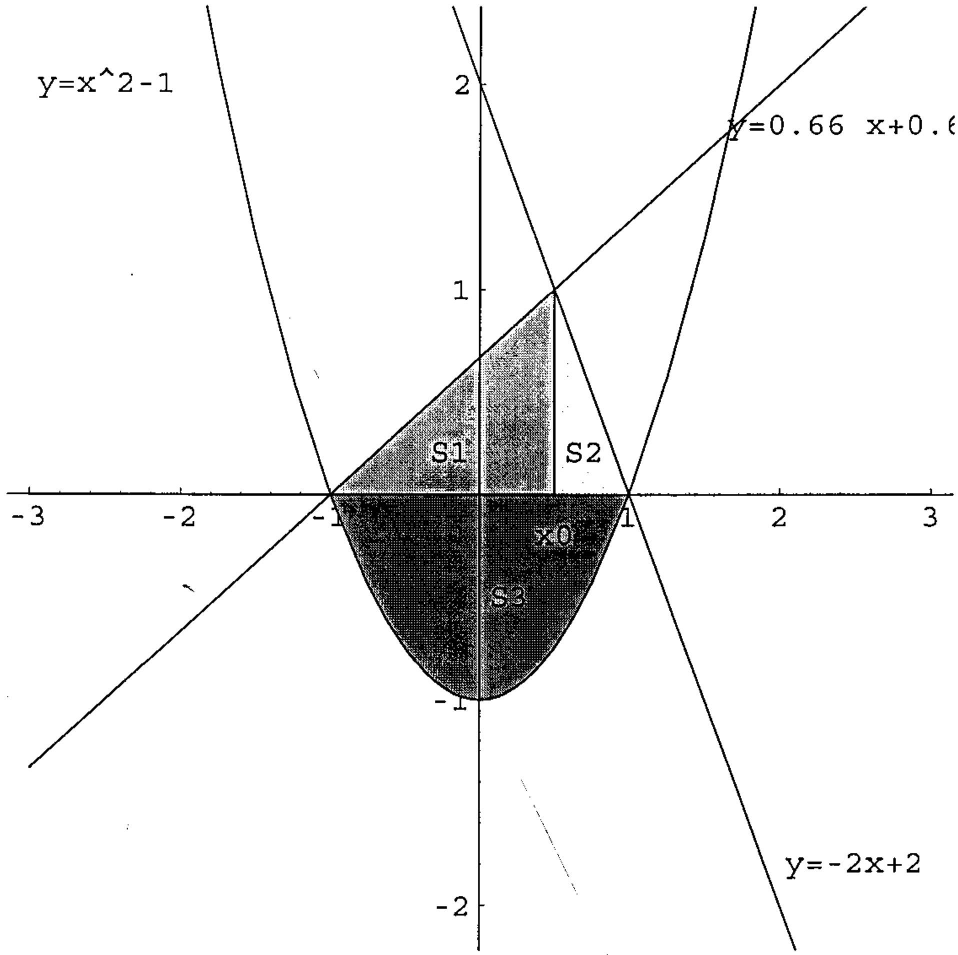
$$u = \ln x, \;\; \mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x, \, v = \frac{x^2}{2}.$$

Vstavimo v integral:

$$\left. \frac{x^2}{2} \right|_1^e - \left. \frac{x^2}{2} \ln x \right|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e x \, \mathrm{d}x = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^e - \left. \frac{x^2}{2} \ln x \right|_1^e + \left. \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right|_1^e$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} \ln e + \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

18. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje: $y = x^2 - 1$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ter $y = -2x + 2$ za $x \in [-1, 1]$.

Rešitev: Skicirajmo si situacijo:



Iskano ploščino bomo sestavili iz treh koščkov, S_1, S_2 in S_3. Izračunajmo najprej S_3, za kar vzemimo ploščino med krivuljo $y = x^2 - 1$ ter x-osjo. Dobimo jo kot določeni integral krivulje $y = x^2 - 1$ za $x \in [-1, 1]$, se pravi med ničlama te krivulje. Pri tem moramo paziti na predznak integrala (ker je krivulja pod x-osjo, dobimo namreč pri integriranju negativno vrednost, ploščino pa potem dobimo kot absolutno vrednost dobljenega integrala):

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{-1}^{1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{3} - 1 - \frac{(-1)^3}{3} - 1\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

S_1 naj bo ploščina med x-osjo in premico $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ na intervalu $[-1, x_0]$, kjer je x_0 presečišče premic $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ter $y = -2x + 2$. S_2 naj bo ploščina med x-osjo in premico $y = -2x + 2$ na intervalu $[x_0, 1]$. Da bi lahko izračunali ploščini S_1 in S_2, potrebujemo absciso presečišča danih premic: $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ in $y = -2x + 2$.

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = -2x + 2$$

$$2x + 2 = -6x + 6$$

$$8x = 4$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

Izračunajmo ploščino S_1:

$$S_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3})\,\mathrm{d}x = (\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot x)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot (-1)\right) = \frac{3}{4}.$$

Preostane nam še izračun ploščine S_2:

$$S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-2x + 2)\,\mathrm{d}x = (-2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= -2 \cdot \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Skupna ploščina je torej:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

19. Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo krivuljo $y = \sqrt{x \cdot \sin x}$ okoli osi x na intervalu $[0, \pi]$.

Rešitev: Poglejmo, kako izgleda funkcija $y = \sqrt{x \cdot \sin x}$ na intervalu $[0, \pi]$:

Prostornino rotacijskega telesa dobimo kot naslednji integral:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi (\sqrt{x \cdot \sin x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$$

Integral rešimo z metodo per partes:

$$u = x,\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ v = -\cos x.$$

Dobimo:

$$\pi \int_0^\pi x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \pi \left(-x \cdot \cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \pi \left(-x \cdot \cos x|_0^\pi + \sin x|_0^\pi \right) = \pi \left(-\pi \cdot \cos \pi + 0 \cdot \cos 0 + \sin \pi - \sin 0 \right) = \pi^2$$