Ime in priimek (s TISKANIMI ČRKAMI)

Matematika: tretji izpit - računski del

23. avgust 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Izračunjte limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = n\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} - \sqrt{2n}\right).$$

Rešitev:

$$a_n = n\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} - \sqrt{2n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} + \sqrt{2n}\right)}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} + \sqrt{2n}\right)} = n\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} + \sqrt{2n}}.$$

Sledi

$$a_n = n\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} + \sqrt{2n}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} + \sqrt{2n}}\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}.$$

Potem pa je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n}}} + \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\sqrt{1+n^{-3/2}}}+\sqrt{2})} \to \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

in

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{n}{n(\sqrt{1+n^{-3/2}}+1)} \to \frac{1}{2}$$

ter $a_n \to \frac{1}{4\sqrt{2}}$

2. naloga (25 točk)

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^2(1-x)$.

a) (13 točk) Določite interval $[a,b]$, $a < b$, na katerem funkcija f narašča, in vrednosti, ki jih na tem intervalu doseže.-

REŠITEV: $f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x) \geq 0$ za $x \in [0, \frac{2}{3}]$. Ker je $f(0) = 0$ in $f(2/3) = 4/27$, funkcija zavzame vse vrednosti z intervala $[0, 4/27]$.

b) (5 točk) Določite območje konveksnosti in konkavnosti grafa funkcije f.

REŠITEV: $f''(x) = 2 - 6x = 0$ za $x = \frac{1}{3}$ (prevoj). Če je $x > 1/3$, je $f''(x) < 0$ in f je konkavna. Za $x < 1/3$ je f konveksna.

c) (7 točk) Zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v prevojni točki.

REŠITEV: Prevojna točka je pri $x = 1/3$, $f(1/3) = 2/27$. Izračunamo $f'(1/3) = 1/3$.

Enačba tangente je $y - 2/27 = 1/3(x - 1/3)$ oz. $y = x/3 - 1/27$.

3. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Izračunajte določeni integral

$$\int_{-1}^{2} x\sin(x^2+1)\,dx.$$

Rešitev: Zapišemo lahko

$$\int_{-1}^{2} x\sin(x^2+1)\,dx = \int_{-1}^{1} x\sin(x^2+1)\,dx + \int_{1}^{2} x\sin(x^2+1)\,dx.$$

Zaradi lihosti je prvi integral enak 0, v drugega pa vpeljemo $t = x^2+1$. Sledi

$$\int_{1}^{2} x\sin(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin t\,dt = \frac{1}{2}(-\cos 5 + \cos 2)$$

b) (15 točk) Izračunajte nedoločeni integral.

$$\int \frac{1}{1-e^{-2x}}\,dx.$$

Rešitev: Ker je

$$\frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1},$$

je smiselno vpeljati $t = e^{2x}-1$, $dt = 2e^{2x}\,dx$. Sledi

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log t = \frac{1}{2}\log(e^{2x}-1) + C.$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Rešite matrično enačbo $AX = A^2 + A^3$ glede na različne vrednosti parametra a.

Rešitev: Ker je $AX = A(A + A^2)$, je smiselno enačbo z leve pomnožiti z A^{-1}. Slednje pa lahko naredimo le, če je $\det A \neq 0$. Ker je $\det A = -a$, za $a \neq 0$, dobomo

$$X = A + A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 + 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2a \\ 0 & a + a^2 \end{bmatrix}.$$

V primeru $a = 0$ pa moramo rešiti matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = A(A + A^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sledi $-x + 2z = 0$ in $-y + 2w = 0$. Torej je

$$X = \begin{bmatrix} 2z & 2w \\ z & w \end{bmatrix}$$

dvoparametrična družina rešitev.