**Iskanje lokalnega minimuma funkcije več spremenljivk**

Tokrat nas bo zanimalo, kako poiskati (lokalni) minimum funkcije $f\colon U \to \mathbb{R}$, kjer je $U \subseteq \mathbb{R}^n$. (To seveda že znamo s primerno uporabo Newtonove metode.) Z *metodo najhitrejšega spusta* (ali z *gradientno metodo*) iščemo minimum funkcije $f\colon U \to \mathbb{R}$ tako, da začnemo z nekim začetnim približkom $\mathbf{x}^{(0)}$, nato pa iterativno nadaljujemo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} - h \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(0)}),\\
\mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} - h \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(1)}),\\
&\ \vdots\\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} - h \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^{(k)}),
\end{aligned}$$

kjer je korak $h > 0$ primerno izbrano (majhno) realno število. (Konvergenca take metode je odvisna od funkcije $f$, začetnega približka $\mathbf{x}^{(0)}$ in izbire $h$.)

1. Funkcija $f$ ima predpis

$$f(x,y) = (1-x)^2 + 4(y-x^2)^2.$$

   (a) Poišči minimum funkcije $f$.

   (b) Poišči (približek za) minimum funkcije $f$ z metodo najhitrejšega spusta. V octave-u napiši funkcijo `x = gradmet(gradf, h, x0, tol, maxit)`, ki izvede to metodo za funkcijo $f$ z gradientom `gradf`, korakom `h` in začetnim približkom `x0`. (Z `maxit` omejimo največje dovoljeno število iteracij, v `tol` pa predpišemo zahtevano natančnost.)

2. Recimo, da imamo dve krožnici, $K$ in $L$, prvo s središčem v $(a,b)$ in polmerom $r$, drugo s središčem v $(a',b')$ in polmerom $r'$. Poiskati želimo razdaljo $d$ med tema dvema krožnicama in točki $P \in K$ ter $Q \in L$, ki sta najbližje skupaj.

   (a) Izrazi razdaljo $d$ med tema dvema krožnicama analitično. (Zgolj za primerjavo s spodnjim postopkom.)

   (b) Zapiši parametrizaciji $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ krožnic $K$ in $L$.

   (c) Naj bo $f(t,u) = \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(u)\|^2$. Izrazi $\operatorname{grad} f$ s parametrizacijama $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ (ter odvodoma $\dot{\mathbf{p}}$ in $\dot{\mathbf{q}}$).

   (d) V octave-u napiši funkcijo `[d, T] = razdaljaK(K)`, ki z metodo najhitrejšega spusta poišče minimum funkcije $f$, tj. razdaljo med tema dvema krožnicama. Argument $K$ je $3 \times 2$ matrika, s prvim stolpcem $[a,b,r]^\mathsf{T}$ in drugim stolpcem $[a',b',r']^\mathsf{T}$. Funkcija naj vrne razdaljo $d$ in $2 \times 2$ matriko $T$ s krajevnima vektorjema točk $P$ in $Q$, tj. $T = [\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_Q]$.

   (e) Kako bi na podoben način poiskal točki na krožnicah $K$ in $L$, ki sta najbolj oddaljeni? Kako bi na podoben način poiskal razdaljo med dvema elipsama?

3. Ali bi znal najmanjše razdalje v prejšnji nalogi poiskati tudi z uporabo Newtonove ali Gauss–Newtonove metode? Poskusi in primerjaj z gradientno metodo.

4. Z malce iznajdljivosti lahko gradientno metodo uporabimo tudi za reševanje sistemov nelinearnih enačb. Reševanje sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ prevedemo na iskanje minimuma funkcije $f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$.

   (a) Preveri, da velja
   $$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 2J\mathbf{F}(\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$
   En korak gradientne metode za $f = \mathbf{F}^\mathsf{T}\mathbf{F}$ je torej
   $$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - 2hJ\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})^\mathsf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$
   (Primerjaj to z enim korakom Newtonove iteracije.)

   (b) Z uporabo gradientne metode poišči vsaj eno rešitev sistema
   $$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$