Popolne oblike zapisa preklopnih funkcij

Digitalna vezja

Miha Moškon

miha.moskon@fri.uni-lj.si

https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon

Funkcijska polnost disjunkcije, konjunkcije in negacije

Vsako funkcijo lahko zapišemo z uporabo AND, OR in NOT (AND ali OR lahko tudi izpustimo, ampak vseeno zaenkrat ne)

Normalne oblike zapisa:

- zapis funkcije v dvonivojski obliki
- na posameznem nivoju nastopa le en logični operator

Popolna oblika zapisa:

- v vseh izrazih vhodnega nivoja nastopajo vse vhodne spremenljivke

Popolna disjunktivna normalna oblika

- Normalna: 2 nivoja
- Disjunktivna: operator izhodnega nivoja (2) je disjunkcija
- Popolna: v vseh členih vhodnega nivoja 1 nastopajo vse vhodne spremenljivke

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee_{i=0}^{2^n-1} m_i f(\vec{w}_i)$$

$f(\vec{w}_i)$ ... vrednost funkcije pri i-tem vhodnem vektorju (vrstici)

m_i ... minterm i; $m_i = x_1^{w_{1,i}} \cdot x_2^{w_{2,i}} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_{n,i}}; i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$

$$x^w = \begin{cases} x, w = 1 \\ \overline{x}, w = 0 \end{cases}$$

$w_{j,i}$...j-ti bit binarnega zapisa števila i

Mintermi in pravilnostna tabela

x_1	x_2	x_3	f(x_1,x_2,x_3)	minterm
0	0	0	$f(\vec{w}_0)$	$m_0 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
0	0	1	$f(\vec{w}_1)$	$m_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3$
0	1	0	$f(\vec{w}_2)$	$m_2 = \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$
0	1	1	$f(\vec{w}_3)$	$m_3 = \overline{x}_1 x_2 x_3$
1	0	0	$f(\vec{w}_4)$	$m_4 = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
1	0	1	$f(\vec{w}_5)$	$m_5 = x_1\overline{x}_2 x_3$
1	1	0	$f(\vec{w}_6)$	$m_6 = x_1 x_2\overline{x}_3$
1	1	1	$f(\vec{w}_7)$	$m_7 = x_1 x_2 x_3$

Popolna konjunktivna oblika

- Normalna: 2 nivoja
- Konjunktivna: operator izhodnega nivoja (2) je konjunkcija
- Popolna: v vseh členih vhodnega nivoja (1) nastopajo vse vhodne spremenljivke $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \&_{i=0}^{2^n-1} \left(M_{2^n-1-i} \vee f(\vec{w}_i)\right)$

M_{2^n-1-i} ... maksterm 2^n-1-i; $M_{2^n-1-i} = x_1^{\overline{w}_{1,i}} \vee x_2^{\overline{w}_{2,i}} \vee ... \vee x_n^{\overline{w}_{n,i}}; i = 0, 1, 2, ..., 2^n - 1$

Makstermi in pravilnostna tabela

x_1	x_2	x_3	f(x_1,x_2,x_3)	maksterm
0	0	0	$f(\vec{w}_0)$	$M_7 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	$f(\vec{w}_1)$	$M_6 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
0	1	0	$f(\vec{w}_2)$	$M_5 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	$f(\vec{w}_3)$	$M_4 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$
1	0	0	$f(\vec{w}_4)$	$M_3 = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	$f(\vec{w}_5)$	$M_2 = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
1	1	0	$f(\vec{w}_6)$	$M_1 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
1	1	1	$f(\vec{w}_7)$	$M_0 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$

Primer

Zapiši funkcijo v PDNO!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 x_3$$

Tabela:

x_1	x_2	x_3	f(x_1,x_2,x_3)	minterm
0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	m_1
0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	1	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	m_6
1	1	1	1	m_7

Nadaljevanje primera

Vstavimo v enačbo PDNO:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \vee x_2 x_3 \\ &= m_0 \cdot 0 \vee m_1 \cdot 0 \vee m_2 \cdot 0 \vee m_3 \cdot 1 \vee m_4 \cdot 1 \vee m_5 \cdot 1 \vee m_6 \cdot 1 \vee m_7 \cdot 1 \\ &= m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \\ &= \vee^3(4, 5, 6, 7) \\ &= x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Dobili smo minterme, ki so soležni enicam v tabeli!

Primer

Zapiši funkcijo v PKNO!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 x_3$$

Tabela:

x_1	x_2	x_3	f(x_1,x_2,x_3)	Maksterm
0	0	0	0	M_7
0	0	1	0	M_6
0	1	0	0	M_5
0	1	1	1	M_4
1	0	0	1	M_3
1	0	1	1	M_2
1	1	0	1	M_1
1	1	1	1	M_0

Nadaljevanje primera

Vstavimo v enačbo PKNO:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \vee x_2 x_3 \\ &= (M_7 \vee 0) \cdot (M_6 \vee 0) \cdot (M_5 \vee 0) \cdot (M_4 \vee 1) \cdot (M_3 \vee 1) \cdot (M_2 \vee 1) \cdot (M_1 \vee 1) \cdot (M_0 \vee 1) \\ &= M_7 \cdot M_6 \cdot M_5 \\ &= \&^3(7, 6, 5) \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \end{aligned}$$

Dobili smo maksterme, ki so soležni ničlam v tabeli!

Relacije med mintermi in makstermi

$$\overline{m}_i = M_{2^n-1-i} \qquad m_i \vee M_{2^n-1-i} = 1$$

$$\overline{M}_i = m_{2^n-1-i} \qquad m_i \cdot M_{2^n-1-i} = 0$$

Relacije med mintermi in makstermi

$$\vee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \qquad \forall i \neq j : m_i \cdot m_j = 0$$

$$\&_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0 \qquad \forall i \neq j : M_i \vee M_j = 1$$

Pretvorba med oblikama

Zaradi dualnosti med mintermi in makstermi lahko pridemo hitro iz ene oblike do druge:

1) Funkcijo negiramo (izpišemo komplementarne terme)
2) Upoštevamo relacijo in dobimo dualne terme

$$\overline{m}_i = M_{2^n-1-i}$$

Pretvorba med oblikama

Primer: $V^3(3,4,5,6,7)$ pretvori v PKNO

1) Komplementarni mintermi (negirana funkcija): $V^3(0,1,2)$
2) Dualni makstermi $\overline{M}_i = m_{2^n-1-i}$

7-i → 7-0, 7-1, 7-2 → $\&^3(7,6,5)$

Pretvorba med oblikama

Primer: $\&^3(7,6,5)$ pretvori v PDNO

1) Komplementarni makstermi (negirana funkcija): $\&^3(4,3,2,1,0)$
2) Dualni mintermi $\overline{m}_i = M_{2^n - 1 - i}$

7-i → 7-4, 7-3, 7-2, 7-1, 7-0 → $V^3(3,4,5,6,7)$