

# Karnaughjevi diagrami

Digitalna vezja

Miha Moškon

[miha.moskon@fri.uni-lj.si](mailto:miha.moskon@fri.uni-lj.si)

<https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon>

# Karnaughjevi diagrami (K-map)

Način vizualizacije pravilnostne tabele, tako da je ta lažja za minimizacijo

Sosednost med mintermi (vhodnimi vektorji) se nanaša na sosednost med polji

Omogoča določanje MDNO (in MKNO) na podlagi iskanja vzorcev

Primerno za ročen postopek minimizacije

# Sosednost med stolpci in vrsticami

Fizično sosedna stolpca morata biti tudi logično sosedna

Fizično sosedni vrstici morata biti tudi logično sosedni

Štetje z Grayevim kodiranjem – sosedna koda se razlikujeta natanko za eno negacijo

# Grayevo kodiranje

Sosedna koda se razlikujeta za natanko eno negacijo

Primer:  $n=2$ :  $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$

Primer:  $n=3$ :  $000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 010 \rightarrow 110 \rightarrow 111 \rightarrow 101 \rightarrow 100$

Tudi kod  $2^n-1$  in kod  $0$  se razlikujeta le za eno negacijo

Sosednost se odraža preko robov!

# Grayeva koda

Izračun koda za število  $k$ :  $G(k) = k \wedge (k \gg 1)$

Primer:  $n=3$ ,  $k = 5$

$$5_{10} = 101_2$$

$$101 \gg 1 = 010$$

$$101 \wedge 010 = (1 \text{ XOR } 0)(0 \text{ XOR } 1)(1 \text{ XOR } 0) = 111$$

$$G(5) = 111$$

# Grayeva koda

Recept za štetje pri  $n = 3$ .

Če znamo šteti za  $n = 2$ , znamo tudi za  $n = 3$

$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$

Ponovimo enako sekvenco, pri čemer postavimo MSB na 0:

**$000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 010$**

Nadaljujemo tako, da damo MSB na 1 in sekvenco ponovimo (tokrat s štetjem navzdol):

**$110 \rightarrow 111 \rightarrow 101 \rightarrow 100$**

# Grayeva koda

Recept za štetje pri  $n = 4$ .

Če imamo sekvenco za  $n = 3$ , lahko iz nje naredimo sekvenco za  $n = 4$

$n = 3$  (navzgor):

000 → 001 → 011 → 010 → 110 → 111 → 101 → 100

$n = 3$  (navzdol):

100 → 101 → 111 → 110 → 010 → 011 → 001 → 000

$n = 4$  (1. del – MSB = 0, štetje gor):

**0000** → **0001** → **0011** → **0010** → **0110** → **0111** → **0101** → **0100**

$n = 4$  (2. del – MSB = 1, štetje dol):

**1100** → **1101** → **1111** → **1110** → **1010** → **1011** → **1001** → **1000**

# Karnaughjevi diagrami (K-map)

Način vizualizacije pravilnostne tabele, tako da je ta lažja za minimizacijo

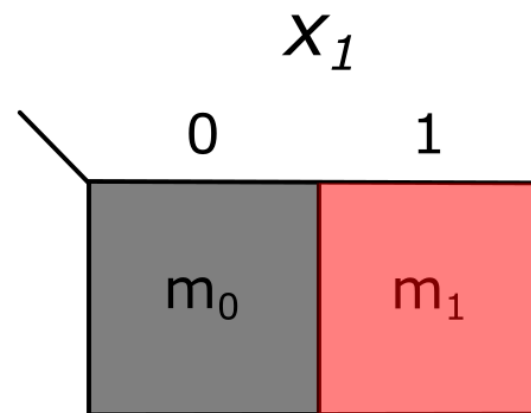
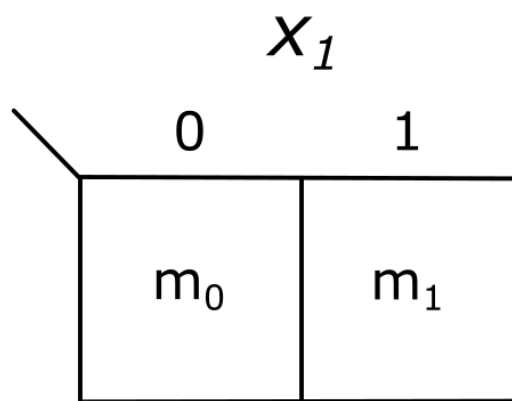
$2^n$  polj

Označevanje pokritij spremenljivk: pokritja moramo označiti tako, da pridemo do vseh  $2^n$  kombinacij vhodnih spremenljivk

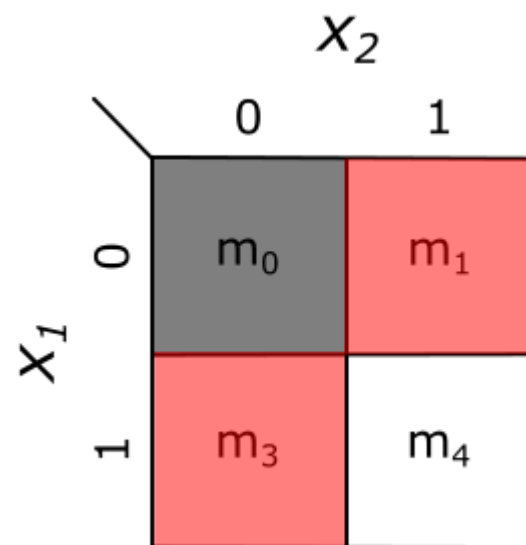
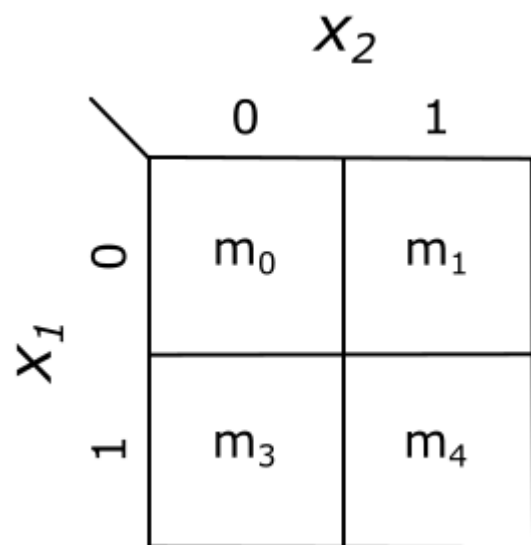
Vsi vhodni vektorji  $\rightarrow$  vsi mintermi



# Karnaughjevi diagrami (n=1)



# Karnaughjevi diagrami (n=2)



# Karnaughjevi diagrami (n=3)

		$X_2, X_3$			
		00	01	11	10
$X_1$	0	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	1	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

		$X_2, X_3$			
		00	01	11	10
$X_1$	0	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	1	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

# Karnaughjevi diagrami (n=4)

		$X_3, X_4$			
		00	01	11	10
$X_1, X_2$	00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	01	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
	10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$

# Karnaughjevi diagrami (n=4)

		$X_3, X_4$			
		00	01	11	10
$X_1, X_2$	00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	01	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
	10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$

# Karnaughjevi diagrami (n=5)

		$X_3, X_4, X_5$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$X_1, X_2$	00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$	$m_6$	$m_7$	$m_5$	$m_4$
	01	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$	$m_{14}$	$m_{15}$	$m_{13}$	$m_{12}$
	11	$m_{24}$	$m_{25}$	$m_{27}$	$m_{26}$	$m_{30}$	$m_{31}$	$m_{29}$	$m_{28}$
	10	$m_{16}$	$m_{17}$	$m_{19}$	$m_{18}$	$m_{22}$	$m_{23}$	$m_{21}$	$m_{20}$

# Karnaughjevi diagrami (n=5)

		$X_3, X_4, X_5$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$X_1, X_2$	00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$	$m_6$	$m_7$	$m_5$	$m_4$
	01	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$	$m_{14}$	$m_{15}$	$m_{13}$	$m_{12}$
	11	$m_{24}$	$m_{25}$	$m_{27}$	$m_{26}$	$m_{30}$	$m_{31}$	$m_{29}$	$m_{28}$
	10	$m_{16}$	$m_{17}$	$m_{19}$	$m_{18}$	$m_{22}$	$m_{23}$	$m_{21}$	$m_{20}$

# Karnaughjevi diagrami (n=5, alternativa)

		$X_3, X_4$			
		00	01	11	10
$X_1, X_2$	00	$m_0$	$m_2$	$m_6$	$m_4$
	01	$m_8$	$m_{10}$	$m_{14}$	$m_{12}$
	11	$m_{24}$	$m_{26}$	$m_{30}$	$m_{28}$
	10	$m_{16}$	$m_{18}$	$m_{22}$	$m_{20}$

$x_5=0$

		$X_3, X_4$			
		00	01	11	10
$X_1, X_2$	00	$m_1$	$m_3$	$m_7$	$m_5$
	01	$m_9$	$m_{11}$	$m_{15}$	$m_{13}$
	11	$m_{25}$	$m_{27}$	$m_{31}$	$m_{29}$
	10	$m_{17}$	$m_{19}$	$m_{23}$	$m_{21}$

$x_5=1$



# Karnaughjevi diagrami (n=5, alternativa)

Karnaugh map for  $x_5 = 0$ . The vertical axis is labeled  $x_1, x_2$  and the horizontal axis is labeled  $x_3, x_4$ .

	$x_3, x_4$			
	00	01	11	10
00	$m_0$	$m_2$	$m_6$	$m_4$
01	$m_8$	$m_{10}$	$m_{14}$	$m_{12}$
11	$m_{24}$	$m_{26}$	$m_{30}$	$m_{28}$
10	$m_{16}$	$m_{18}$	$m_{22}$	$m_{20}$

$x_5 = 0$

Karnaugh map for  $x_5 = 1$ . The vertical axis is labeled  $x_1, x_2$  and the horizontal axis is labeled  $x_3, x_4$ .

	$x_3, x_4$			
	00	01	11	10
00	$m_1$	$m_3$	$m_7$	$m_5$
01	$m_9$	$m_{11}$	$m_{15}$	$m_{13}$
11	$m_{25}$	$m_{27}$	$m_{31}$	$m_{29}$
10	$m_{17}$	$m_{19}$	$m_{23}$	$m_{21}$

$x_5 = 1$

# Zapis funkcije s Karnaughjevimi diagrami

1. Funkcijo zapišemo v PDNO
2. Enice vpišemo v polja, ki pripadajo mintermom v PDNO

Primer:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(0, 2, 3, 4, 6, 7, 15)$

		$x_3, x_4$			
		00	01	11	10
$x_1, x_2$	00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	01	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
	10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$



		$x_3, x_4$			
		00	01	11	10
$x_1, x_2$	00	1		1	1
	01	1		1	1
	11			1	
	10				

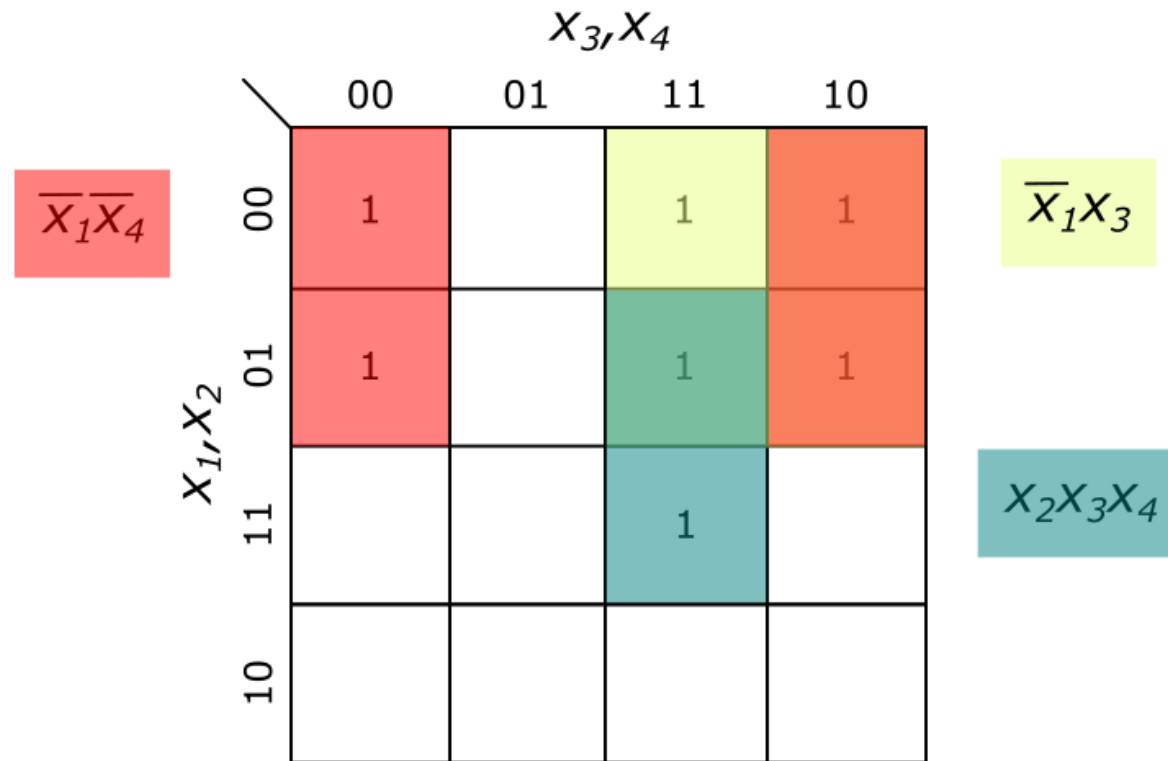
# Minimizacija s Karnaughjevimi diagrami

1. Funkcijo v Karnaughjevem diagram
2. Določimo potrebne glavne vsebovalnike:
  - med seboj združujemo čim večje število sosednih mintermov, pri katerih je funkcijska vrednost enaka 1
  - združujemo lahko 1,2,4,8,16,... mintermov
  - iščemo najmanjši nabor pokritij, s katerim pokrijemo vse enice
  - v vsakem koraku poskušamo dobiti čim večje pokritje, saj s tem izločimo večje število vhodnih spremenljivk

# Minimizacija s Karnaughjevimi diagrami

Primer:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(0, 2, 3, 4, 6, 7, 15)$$



# Minimizacija nepopolnih funkcij

Digitalna vezja

Miha Moškon

[miha.moskon@fri.uni-lj.si](mailto:miha.moskon@fri.uni-lj.si)

<https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon>

# Nepopolna preklopna funkcija

Funkcijske vrednosti niso določene pri vseh vhodnih vektorjih

Don't care (? ali X)

Z glavnimi vsebovalniki jih lahko pokrijemo (postavimo na 1) ali pa ne (postavimo na 0)

Iščemo čimkrajšo obliko zapisa

# Primer: določi MNO nepopolne funkcije

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V^4(0, 4, 6, 7, 8, 10) V_?^4(2, 11, 15)$$

MDNO:

		$x_3, x_4$			
		00	01	11	10
$x_1, x_2$	00	1			?
	01	1		1	1
	11			?	
	10	1		?	1

$$\overline{x_1} \overline{x_4}$$

$$x_2 x_3 x_4$$

$$\overline{x_2} \overline{x_4}$$

$$f_{\text{MDNO}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \overline{x_4} V \overline{x_2} \overline{x_4} V x_2 x_3 x_4$$

Vrat: 4

Vhodov: 10

# Primer: določi MNO nepopolne funkcije

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V^4(0, 4, 6, 7, 8, 10) V_?^4(2, 11, 15)$$

MKNO:

		$x_3, x_4$			
		00	01	11	10
$x_1, x_2$	00		1	1	?
	01		1		
	11	1	1	?	1
	10		1	?	

$\bar{x}_3 x_4$ 
 $x_1 x_2$ 
 $\bar{x}_2 x_4$

$$\bar{f}_{\text{MDNO}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 x_4 V \bar{x}_3 x_4 V x_1 x_2$$

$$f_{\text{MKNO}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 V \bar{x}_4)(x_3 V \bar{x}_4)(\bar{x}_1 V \bar{x}_2)$$

Vrat: 4

Vhodov: 9

$$f_{\text{MNO}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{\text{MKNO}}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$