Funkcijska polnost

Digitalna vezja

Miha Moškon

miha.moskon@fri.uni-lj.si

https://fri.uni-lj.si/en/about-faculty/employees/miha-moskon

Funkcijska polnost

Nabor (množica) funkcij predstavlja funkcijsko poln sistem, če lahko z njim izrazimo poljubno logično funkcijo

Po definiciji Booleove algebre je nabor {AND, OR, NOT} funkcijsko poln sistem.

Že samo {AND, NOT} in {OR, NOT} predstavljata funkcijsko polna sistema.

Prevedba

Kako lahko pokažemo, da je {AND, NOT} funkcijsko poln sistem?

S prevedbo na znan funkcijsko poln sistem, torej na {AND, OR, NOT}.

AND in NOT že imamo; kaj pa OR

Pokažimo, da je mogoče OR izraziti z AND in NOT

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2}$$

S prevedbo na {AND, OR, NOT} smo pokazali, da je {AND, NOT} funkcijsko poln sistem.

Prevedba

Težavi pri prevedbi na znan funkcijsko poln sistem:

- ni enoličnega postopka
- če prevedbe ne najdemo, še ne pomeni, da ne obstaja

Relativno enostavno pokažemo, da je nek nabor funkcijsko poln sistem.

Težko pokažemo, da nek nabor **ni** funkcijsko poln sistem.

Postov teorem funkcijske polnosti

Nabor funkcij predstavlja funkcijsko poln sistem, če ni podmnožica nobenega izmed zaprtih razredov (odpira vse zaprte razrede)

Za vsak razred moramo najti vsaj eno funkcijo iz nabora, ki temu razredu **ne pripada** (ga odpira)

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
f_2	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\dots$					
f_k	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$

V tem primer je nabor funkcijsko poln sistem

Postov teorem funkcijske polnosti

Rezultat – tabela:

	T_0	T_1	S	L	M
f_1	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
f_2	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
...					
f_k	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$

Da je nabor funkcijsko poln, moramo imeti **nepripadnost vsaj enkrat v vsakem stolpcu**.

Zaprti razredi

T_0: razred funkcij, ki ohranjajo ničlo $(f(0,0,\ldots,0)=0)$

T_1: razred funkcij, ki ohranjajo enico $(f(1,1,\ldots,1)=1)$

L: razred linearnih funkcij $(f(x_1,x_2,...,x_n)\in L,\ f(x_1,x_2,...,x_n)=$

$$= a_0 \nabla a_1 x_2 \nabla \ldots \nabla a_n x_n)$$

S: razred sebidualnih funkcij $(\overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n))$

M: razred monotonih funkcij

$$(f(x_1,x_2,...,x_n)\in M, \forall i,j : \vec{w}_i < \vec{w}_j \rightarrow f(\vec{w}_i)\leq f(\vec{w}_j))$$

Preverjanje pripadnosti T_0 in T_1

V funkcijo vstavimo vhodni vektor 0 (T_0) oziroma 2^{n-1} (T_1).

Funkcija odpira T_0, če $f(\vec{w}_0) = 1$

Funkcija odpira T_1, če $f(\vec{w}_{2^n-1}) = 0$

Preverjanje pripadnosti T_0 in T_1

Primer:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

$$f(0,0,0,0) = 0 \implies f \in T_0$$

$$f(1,1,1,1) = 0 \implies f \notin T_1$$

Preverjanje pripadnosti L – analitično

Zapišemo linearno obliko funkcije:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \nabla a_1 x_1 \nabla a_2 x_2 \nabla \cdots \nabla a_n x_n$$

Določimo vrednosti koeficientov a

Za n-vhodno funkcijo je potrebno določiti n+1 koeficient pri 2^n funkcijskih vrednostih

Po določitvi koeficientov preverimo, če se dobljena linerna funkcija ujema z izhodiščno funkcijo (pravilnostna tabela obeh funkcij)

Preverjanje pripadnost L – analitično

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

Določitev koeficientov: $f_L(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_0 \nabla a_1 x_1 \nabla a_2 x_2 \nabla a_3 x_3 \nabla a_4 x_4$

Imamo 5 neznank in 16 funkcijskih vrednosti – neznanke določimo na izbranih vrednostih (in preverimo ujemanje na ostalih)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Preverjanje pripadnost L – analitično

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

Določitev koeficientov: $f_L(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_0 \nabla a_1 x_1 \nabla a_2 x_2 \nabla a_3 x_3 \nabla a_4 x_4$

$a_0 : f(0,0,0,0) = 0,\ f_L(0,0,0,0) = a_0 \implies a_0 = 0$

$a_1 : f(1,0,0,0) = 1,\ f_L(1,0,0,0) = a_0 \nabla a_1 = 0 \nabla a_1 = a_1 \implies a_1 = 1$

$a_2 : f(0,1,0,0) = 1,\ f_L(0,1,0,0) = a_0 \nabla a_2 = 0 \nabla a_2 = a_2 \implies a_2 = 1$

$a_3 : f(0,0,1,0) = 1,\ f_L(0,0,1,0) = a_0 \nabla a_3 = 0 \nabla a_3 = a_3 \implies a_3 = 1$

$a_4 : f(0,0,0,1) = 1,\ f_L(0,0,0,1) = a_0 \nabla a_4 = 0 \nabla a_4 = a_4 \implies a_4 = 1$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Preverjanje pripadnost L – analitično

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

Dobili smo linearen zapis funkcije: $f_L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \nabla x_2 \nabla x_3 \nabla x_4$

Ali je funkcija res enaka izhodiščni?

Preverimo s tabelo…

Preverjanje pripadnost L – analitično

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)_L$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Protiprimer:

$$f(0,1,0,1) \neq f_L(0,1,0,1) \implies f \notin L$$

Preverjanje pripadnost L – s Karnaughjevim diagramom

Preverjamo sosedna pokritja

Ta se morajo bodisi popolnoma ujemati ali popolnoma razlikovati

Začnemo s pokrijem velikosti 1; polji, ki smo ju primerjali združimo v pokritje velikosti 2 in nadaljujemo s primerjanjem tega s poljubnim sosedom…

Nadaljujemo dokler ne pridemo do pokritij velikosti 2^{n-1}

Preverjanje pripadnost L – s Karnaughjevim diagramom

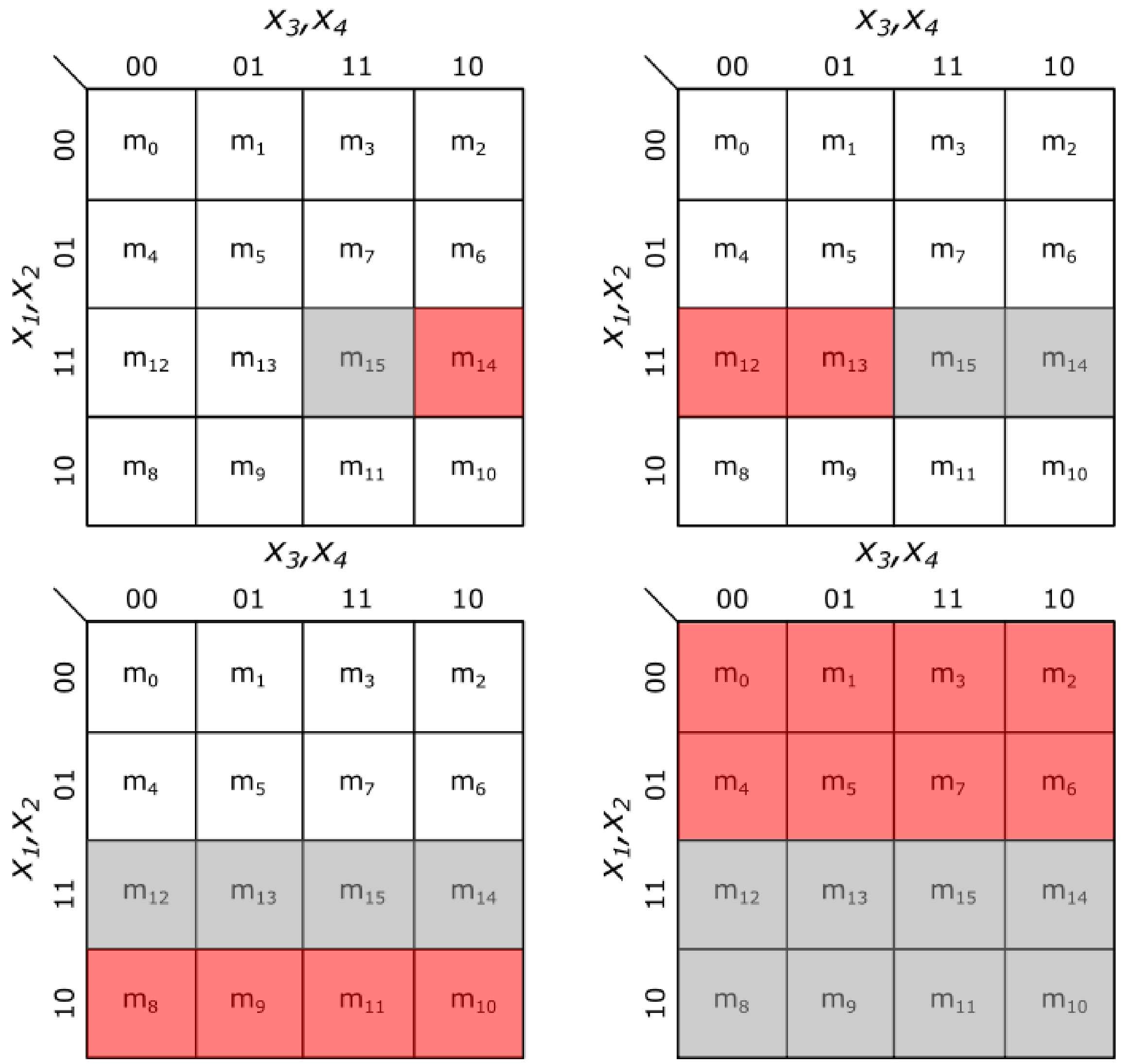
Primer zaporedja pokritij

$x_1x_2x_3x_4$

$x_1x_2x_3\overline{x}_4$

$x_1x_2x_3$

$x_1x_2\overline{x}_3$



x_1x_2

$x_1\overline{x}_2$

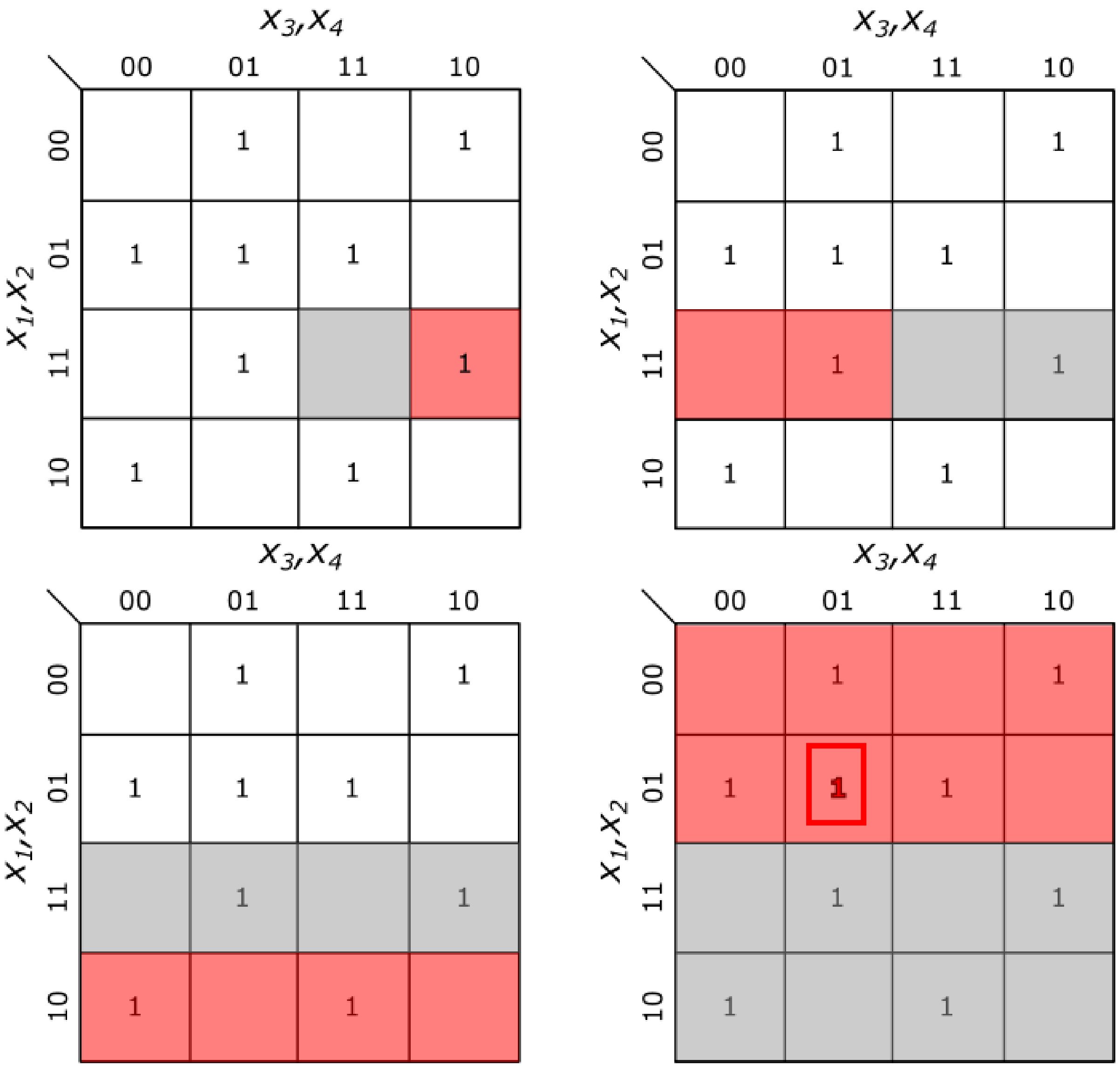
$\overline{x}_1$

x_1

Preverjanje pripadnost L – s Karnaughjevim diagramom

Primer:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$$



Preverjanje ne gre čez zadnji korak – problematičen je minterm 5.

Preverjanje pripadnosti S

Veljati mora: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$

Posledično: $f(\vec{w}_i) \neq f(\vec{w}_{2^n-1-i})$

Tabelarično preverjanje

Tabelo damo na pol in 0. vrstico primerjamo z zadnjo, 1. s predzadnjo…

Če kjerkoli velja enakost, funkcija ni sebidualna.

Dovolj je, da najdemo en protiprimer

Preverjanje pripadnosti S

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	$\boxed{0}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	$\boxed{0}$

Protiprimer:

$$f(0,0,0,0) = f(1,1,1,1) \implies f \notin S$$

Preverjanje pripadnosti M

Pri manjšem vhodnem vektorju, mora biti manjša ali enaka tudi funkcijska vrednost

$$\vec{w}_i < \vec{w}_j \rightarrow f(\vec{w}_i) \leq f(\vec{w}_j)$$

Kdaj je vhodni vektor manjši? Ko na vseh istoležnih bitih velja relacija ≤.

Pri preverjanju monotonosti je dovolj, da primerjamo le sosedne vektorje.

Najlažji pristop: iskanje protiprimera v pravilnostni tabeli.

Preverjanje pripadnosti M

Primer: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	$\boxed{1}$
1	1	1	1	$\boxed{0}$

Protiprimer:

$$(1, 1, 1, 0) < (1, 1, 1, 1); f(1, 1, 1, 0) \not\leq f(1, 1, 1, 1) \implies f \notin M$$

Funkcijska polnost $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4(1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14)$

Če imamo nabor, ki vsebuje samo to funkcijo, ta ni funkcijsko poln sistem, saj ne odpira razreda T0 (funkcija ohranja 0)

Vse ostale razrede odpira

	T_0	T_1	S	L	M
f	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Če nabor razširimo s funkcijo, ki odpira T0 (npr. funkcija 1 ali negacija), dobimo funkcijsko poln sistem.