

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: prvi kolokvij

26. november 2020

Čas pisanja je 100 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$(2 + i)z + 2\bar{z} = 1 + i.$$

b) (13 točk) Poišči vsa kompleksna števila w , ki rešijo enačbo

$$w^3 = z - 2i$$

in jih nariši v kompleksni ravnini.

2. naloga (25 točk)

Podano imamo zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s predpisom

$$a_n = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \right)^n.$$

a) (12 točk) Izračunaj limito zaporedja a_n .

b) (13 točk) Ali je katera izmed vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ ali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ konvergentna?

Če ne znaš rešiti točke a), lahko še vedno rešiš točko b). V tem primeru reši b) dvakrat, prvič ob predpostavki, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ in drugič ob predpostavki, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$. (Vsaj ena od teh seveda ni pravilni odgovor za a), ampak točka b) je v obeh primerih rešljiva.)

3. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & ; x > 0 \\ ax + b & ; -4 < x \leq 0 \\ \sqrt{-x} - 5 & ; x \leq -4 \end{cases}$$

a) (10 točk) Kakšni naj bosta konstanti a in b , da bo funkcija f zvezna na vsej realni osi?

b) (5 točk) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

c) (5 točk) Ali je funkcija f injektivna? Odgovor utemelji!

d) (5 točk) Skiciraj graf funkcije f .

4. naloga (25 točk)

Primer naloge za teoretični del izpita

a) (7 točk) Napišite ϵ - δ definicijo zveznosti funkcije v točki $x = a$.

b) Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$. Odgovori na naslednja vprašanja, pri čemer vsak odgovor dobro utemelji.

1. (3 točke) Ali obstaja zvezna funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da velja $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0$.

2. (3 točke) Ali obstaja zvezna funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da velja $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0$?

3. Naj bo dano zaporedje $(a_n)_{n \geq 1}$ s predpisom $a_n = \frac{\sin(f(n))}{2f(n)}$, $n \geq 1$. Za vsako od vrst utemelji, ali so konvergentne:

• (4 točke) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

• (4 točke) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kjer je $b_1 > 0$ in $a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ za vsak $n \geq 1$.

• (4 točke) $\sum_{n=1}^{\infty} (f(2na_n))^n$.