

Osnove matematične analize: prvi kolokvij

29. november 2021

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!
Vsako nalogo piši na svojo stran. Če ne rešuješ na izpitno polo, se na vsak list zgoraj podpiši, navedi številko naloge ter naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$\operatorname{Re}(z^2) + i \cdot \operatorname{Im}(\bar{z} \cdot (1 + 2i)) = -3.$$

b) (13 točk) Naj bo z rešitev iz točke a) z lastnostjo $\operatorname{Im}(z) > 0$. Poišči vsa kompleksna števila w , ki rešijo enačbo

$$w^3 = z + i - 1$$

in jih nariši v kompleksni ravnini.

2. naloga (25 točk)

Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano rekurzivno:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_n}.$$

a) (20 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno.

b) (5 točk) Izračunaj limito zaporedja a_n .

3. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (1-x)^n$$

konvergentna? Za takšne vrednosti vrsto tudi seštej.

b) (13 točk) Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-x)^n$$

absolutno konvergentna? Za katere vrednosti x je alternirajoča? Ali je za kakšno vrednost x pogojno konvergentna?

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = \arctan(\log(x)).$$

a) (5 točk) Določi definicijsko območje D_f funkcije f . Ali je f monotona? Ali ima kakšno ničlo?

b) (5 točk) Ali je f injektivna? Če je injektivna, izračunaj inverz f^{-1} . Če ni, smiselno skrči definicijsko območje, da bo možno definirati inverz.

c) (5 točk) Skiciraj funkcijo f in njen inverz f^{-1} . (Lahko v isti koordinatni sistem, lahko pa vsak graf v svojega. Poskrbi, da bo jasno označeno, kateri je kateri.)

Definirajmo še funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{2x}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ f(x), & x > 0, \end{cases}$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti, f pa funkcija, ki je definirana zgoraj.

d) (10 točk) Določi vrednosti a in b , da bo funkcija g zvezna.