

## Izpit iz Osnov matematične analize

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi. Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

### 1. [20 točk] Kompleksna števila

- (a) Števila  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -i$  in  $z_3 = 1 - i$  zapišite v polarni obliki in narišite v kompleksni ravnini.
- (b) Opišite in narišite množico  $A$  kompleksnih števil, ki so od  $z_1$  oddaljena za največ 2, in množico  $B$  kompleksnih števil, ki so enako oddaljena od  $z_1$  in  $z_2$ .
- (c) Narišite sliki množic  $A$  in  $B$  s preslikavo  $z \mapsto z - 1$ .
- (d) Narišite še sliki množic  $A$  in  $B$  s preslikavo  $z \mapsto z(1 - i)$ .

## 2. [15 točk] Zaporedja in vrste

- (a) Zaporedje  $(a_n)$  je naraščajoče, če je \_\_\_\_\_.
- (b) Zapišite potreben in zadosten pogoj za konvergenco naraščajočega zaporedja: naraščajoče zaporedje  $(a_n)$  je konvergentno natanko takrat, kadar je  
\_\_\_\_\_
- (c) Za vsakega od naslednjih zaporedij zapišite, ali je naraščajoče, ali je konvergentno in če je, kaj je limita:

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

$$b_n = -n^2 + 20n$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 3. [15 točk] Funkcije

- (a) Funkcija  $f$  je injektivna, če  
\_\_\_\_\_

Za vsako funkcijo določite, ali je injektivna. Če je, zapišite njeno inverzno funkcijo, če ni, napišite zakaj ni.

(b)  $f(x) = \log(x^2 - 1)$

(c)  $h(x) = \log(2x - 1)$

4. [20 točk] **Odvod**

- (a) Kaj je gradient funkcije dveh spremenljivk  $f(x, y)$ ?
- (b) Kam kaže vektor  $\text{grad}f(x, y)$ , če je različen od 0?
- (c) Zapišite gradient funkcije  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- (d) Narišite nivojsko krivuljo funkcije  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  skozi točko  $(1, 1)$  in zapišite smerni odvod v tej točki v smeri tangentno na nivojsko krivuljo.

5. [20 točk] **Ekstremi** Funkcija  $f(x)$  je neskončnokrat odvedljiva.

- (a) Kaj je stacionarna točka funkcije  $f(x)$ ?
- (b) Kako iz prvega odvoda ugotovimo, ali je v stacionarni točki lokalni ekstrem in kakšen je?
- (c) Če je  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$  in  $f^{(4)}(x_0) < 0$ , kaj mora veljati za  $f'''(x_0)$ , da bo v točki  $x_0$  lokalni ekstrem? Bo minimum ali maksimum?
- (d) Ali ima funkcija  $f(x) = \int_0^x t(e^{-t} - 1) dt$  v točki  $x_0 = 0$  lokalni ekstrem? Zakaj? Če je, je minimum ali maksimum?

6. [20 točk] Integral

(a) Kaj je integralska vsota funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ ?

$$S_n =$$

Zapišite definicijo določenega integrala

$$\int_a^b f(x) dx =$$

Integral  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  predstavlja ploščino nekega območja v ravnini. Narišite to območje. Kolikšna je vrednost integrala?