· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Drugi rok iz OME, 02.02.2021

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

Vsako od spodnjih vprašanj je vredno 10 točk.

1. [**40 točk**] V tej nalogi naj bo S **četrta neničelna** cifra vaše vpisne številke, šteto od leve proti desni.

(a) Napišite primer zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih števil, tako da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{S+1}$ divergira, alternirajoča vrsta $\sum_{n=1\infty} (-1)^n a_n^{S+1}$ pa konvergira.

Z definiranjem $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{S+1}}$ je prva vrsta harmonična ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) in zato divergentna, druga pa alternirajoča harmonična ($\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$) in zato konvergentna.

(b) Naj bo $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ vrsta iz samih pozitivnih členov, tako da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Ali je možno, da s spremembami členov a_{2n} (tj. členov s sodimi indeksi), vrsta postane konvergentna?

Ne, saj je potreben pogoj za konvergenco vrste $\lim_n a_n = 0$. Po spremembah še vedno velja $\lim_n a_{2n+1} = 1$.

(c) Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje realnih števil, ki zadošča $a_n \in [0,1]$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2021}$.

i. Napišite ali narišite primer funkcije (ne nujno zvezne) $f : [0,S) \to \mathbb{R}$, za katero velja $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = S$ in $\lim_{x\uparrow S} f(x) = \infty$.

Primer. $f(x) = \begin{cases} S, & x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{S-x}, & \text{sicer.} \end{cases}$

ii. Ali obstaja zvezna funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ki zadošča $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$?

Ne. Zvezna funkcija interval $[0,1]$ preslika v interval oblike $[a,b]$, $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$. Torej ima $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\frac{1}{2021}\right)$ končno vrednost.

Če ste v (1a) definirali $a_n = \frac{1}{n}$, točk niste dobili, saj je v tem primeru vrsta $\sum_n a_n^{S+1}$ konvergentna. Pri (1(c)i) ste točke dobili tudi, če ste narisali graf. Za vse točke je moral imeti obe lastnosti iz naloge, tj. zvezen je moral biti v točki $\frac{1}{2021}$ in zadoščati $f(\frac{1}{2021}) = S$ ter $\lim_{x\uparrow S} f(x) = \infty$. Če ste v (1(c)ii) utemeljili neobstoj s sklicevanjem, da bi morala imeti funkcija f zaradi zveznosti v točki $x = \frac{1}{2021}$ vrednost ∞, ste tudi dobili vse točke.

2. [**30 točk**] V tej nalogi naj bo T **tretja neničelna** cifra vaše vpisne številke, šteto od desne proti levi.

(a) Napišite primer funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, ki v točki $(1, T)$ najhitreje narašča v smeri $(2, 1)$.

$f(x, y) = 2x + y$. Velja namreč $\operatorname{grad} f(1, T) = (2, 1)$.

(b) Napišite primer funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, ki ima v točki $(1, T)$ lokalni minimum.

Namig: Pomagate si lahko s Taylorjevim polinomom stopnje 2 funkcije g v točki (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + g_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} g_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2. \end{aligned}$$

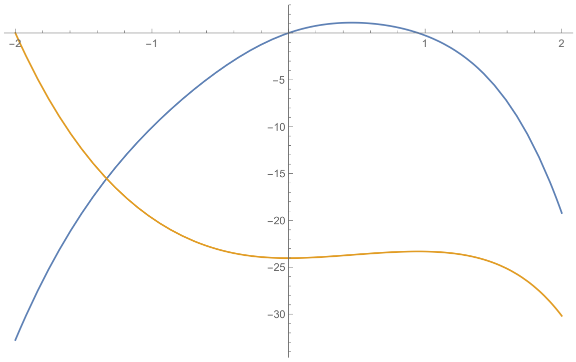
$g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - T)^2$. Velja namreč $g_x(1, T) = g_y(1, T) = 0$ in $g_{xx}(1, T) = g_{yy}(1, T) = 2$, $g_{xy}(1, T) = 0$. Torej je $(1, T)$ stacionarna, Hessejeva matrika $H_g(1, T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ pa zadošča pogojem za lokalni minimum.

(c) Naj bo $\mathcal{C}$ krivulja, določena z enačbo $h(x, y) = 0$. Denimo, da je točka $(1, T)$ ekstrem vaše funkcije f iz (2a) nad krivuljo $\mathcal{C}$. Določite smer tangente na $\mathcal{C}$ v točki $(1, T)$.

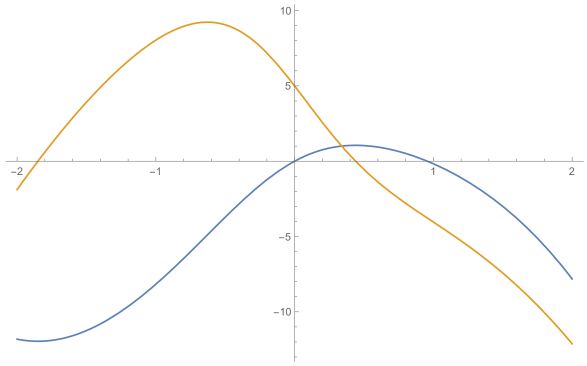
Smer $(-1, 2)$. V vezanem ekstremu namreč velja, da sta grad $f(1, T)$ in grad $h(1, T)$ vzporedna. Torej oba kažeta v smeri $(2, 1)$. Tangenta na krivuljo $\mathcal{C}$ pa je v vsaki točki pravokotna na grad h. Torej mora biti skalarni produkt $(2, 1)$ in smeri tangente (a, b) enak 0, tj. $2a + b = 0$.

V (2a) ste dobili vse točke tudi za kak drug primer funkcije, ki je imela v točki $(1, T)$ gradient oblike $(2k, k)$, $k > 0$. Prav tako ste v (2b) dobili vse točke za kak drug primer funkcije, ki zadošča $g_x(1, T) = g_y(1, T) = 0$ in $H_g(1, T)$ ima pozitivno determinanto ter diagonalo. Če ste napisali primer prave funkcije brez utemeljitve, ste dobili 5 točk. Za delno pravilne utemeljitve pa ste dobili 7 ali 8 točk.

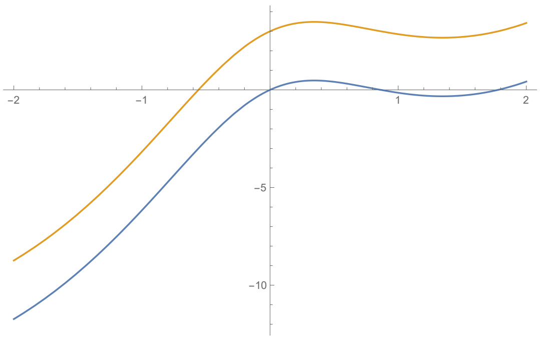
3. **[30 točk]**



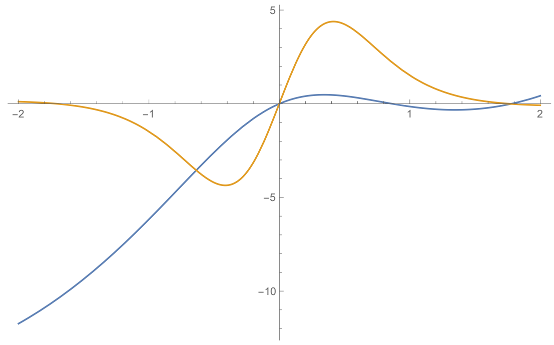
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Za vsako od naslednjih trditev je ustrezna natanko ena od zgornjih slik (za vsako druga slika). Izberite ustrezno sliko in **utemeljite** svojo odločitev tako, da poiščete ustrezno lastnost, ki jo slika ima in jo ostale nimajo.

(a) Na sliki sta grafa dveh nedoločenih integralov neke funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$.
Ustrezna je slika 3, saj se vsi nedoločeni integrali razlikujejo le za konstanto C (na grafu premik za C v y-smeri).

(b) Na sliki sta grafa funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ in njenega določenega integrala $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\, dt$.
Ustrezna je slika 1. $F(2) = 0$, tako da izbiramo med slikama 1 in 4. Toda na sliki 4 je $F(0) = 0$, moral pa bi biti negativen, saj na intervalu $[-2, 0]$ ves čas integriramo negativno funkcijo.

(c) Na sliki je z **modro** barvo narisan graf funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, z oranžno pa njen odvod.
Ustrezna je slika 2. Kje ima modra funkcija lokalni ekstrem, mora imeti oranžna funkcija 0. To je res samo za sliko 2.

Če ste izbrali pravo sliko brez kakršnekoli utemeljitve, točk niste dobili. Če je bila izbrana slika pravilna in utemeljitev smiselna, ste dobili 10 točk (lahko tudi kakšna druga smiselna lastnost, ne le ta iz rešitev). Če je bila izbrana slika pravilna in utemeljitev delno pravilna, ste dobili 5 točk.