· Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

1. izpit iz OME, 23.01.2020

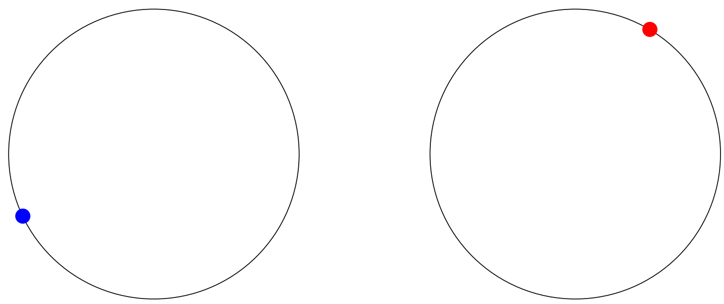
- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Matematična indukcija in številske množice**

(a) [**1**] Naj bo $T(n)$ trditev o naravnem številu $n \in \mathbb{N}$. Vemo, da velja $T(3)$ in da iz resničnosti $T(n)$ sledi resničnost $T(n+4)$. Ali lahko sklepamo, da velja $T(2020)$? Odgovor dobro utemeljite.

(b) [**2**] Razložite pojem n-ti koren kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$. Navedite tudi eksplicitne formule za izračun vseh n-tih korenov števila $a \in \mathbb{C}$.

(c) [**2**] Naj bo $n_1 = 2$ in $n_2 = 6$. Na levi sliki je eden od n_1-tih, na desni pa eden od n_2-tih korenov nekega kompleksnega števila. Na skicah čim bolj natančno označite ostale korene, tj. n_1-te na levi in n_2-te na desni. Pri tem mora biti jasno razvidno, kako ste jih določili. Upoštevajte, da sta središči krožnic v točki $(0,0)$.



2. **[5 točk] Zaporedja in vrste**

(a) [**1**] Navedite definicijo supremuma (natančne zgornje meje) zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

(b) [**1**] Navedite izrek o konvergenci monotonih zaporedij.

(c) [**3**] Obravnavajte konvergenco naslednjih zaporedij. Odgovore dobro utemeljite. Pri tem se lahko sklіčete na lastnosti tistih zaporedij in vrst, ki smo jih obravnavali na predavanjih.

i. [**1**] $b_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

ii. [**2**] $c_0 = 0$, $c_n = c_{n-1} + (-1)^n \Big(e - \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n\Big)$ za $n \geq 1$.

3. [**5 točk**] **Funkcije**

(a) [**2**] Navedite $\epsilon - \delta$ definicijo zveznosti funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ene spremenljivke v točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) [**3**] Naj bosta dani *zvezna* funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, ki zadošča

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \nearrow \frac{1}{4}} f(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow \frac{1}{2}} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to \frac{3}{5}} f(x) = 5, \quad f(1) = -2,$$

in linearna funkcija $g : [-2, 5] \to [0, 14]$, podana s predpisom $g(x) = 2(x + 2)$. Spodaj je nekaj trditev o funkcijah f, g. Obkrožite P, če je trditev pravilna in N, če je napačna.

Pozor: za pravilni odgovor dobite 0.5 točke, za napačnega 0.5 točke *izgubite*. Če ne odgovorite, dobite 0 točk. Skupno pri tej nalogi ne morete dobiti negativnega števila točk.

i. [**0.5**] f je lahko surjektivna. P / N

ii. [**0.5**] Velja $\lim_{x \searrow \frac{1}{4}} f(x) = -1$. P / N

iii. [**0.5**] f ima vsaj 3 ničle. P / N

iv. [**0.5**] Velja $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (g \circ f)(x) = 12$. P / N

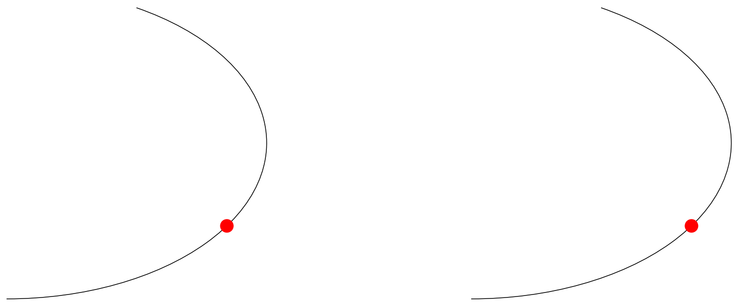
v. [**0.5**] Kompozitum $g \circ f$ je surjektiven. P / N

vi. [**0.5**] Inverz funkcije g je dobro definiran in enak $g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$. P / N

4. **[5 točk] Odvod**

(a) **[1]** Zapišite definicijo smernega odvoda odvedljive funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ v točki (x_0, y_0).

(b) **[1]** Naslednji skici predstavljata del nivojnice neke funkcije dveh spremenljivk. Na **levi** skici v označeni točki narišite smerna vektorja, v katerih funkcija najhitreje spreminja svojo vrednost, na **desni** skici pa smerna vektorja, v katerih se funkcijska vrednost ne spreminja.



(c) **[3]** Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Za vsako od točk $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ **utemeljite**, ali je lokalni ekstremi. Vsak lokalni ekstrem tudi klasificirajte.

i. **[1]** $f_x(P) = f_y(P) = 0,\ f_{xx}(P) = 3, f_{xy}(P) = -1, f_{yy}(P) = 1.$

ii. **[1]** $f_x(R) = 0,\ f_y(R) = -1,\ f_{xx}(R) = 3, f_{xy}(R) = 0, f_{yy}(R) = 2.$

iii. **[1]** $f_x(Q) = f_y(Q) = 0,\ f_{xx}(Q) = 3, f_{xy}(Q) = 2, f_{yy}(Q) = 1.$

5. **[5 točk] Integral**

(a) **[1]** Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

(b) **[1]** Naj bosta F, G nedoločena integrala funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pri čemer je $F(1) = 0$, $G(1) = 2$ in $F(5) = 4$. Koliko je $G(5)$? Odgovor utemeljite (številski odgovor ne zadošča).

(c) [**3**] Dana je funkcija $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Ena od lastnosti te funkcije je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Spodaj je navedenih nekaj trditev o funkciji f. Obkrožite P, če je trditev pravilna in N, če je napačna.

Pozor: za pravilni odgovor dobite 0.5 točke, za napačnega 0.5 točke *izgubite*. Če ne odgovorite, dobite 0 točk. Skupno pri tej nalogi ne morete dobiti negativnega števila točk.

i. [**0.5**] f je liha. P / N

ii. [**0.5**] f je naraščajoča. P / N

iii. [**0.5**] Točka $x = 0$ je stacionarna točka funkcije f. P / N

iv. [**0.5**] f ima natanko en prevoj. P / N

v. [**0.5**] f je konveksna na poltraku $[0, \infty)$. P / N

vi. [**0.5**] f ima lokalne, nima pa globalnih ekstremov. P / N

6. [**5 točk**] **Diferencialne enačbe**

(a) [**1**] Navedite definicijo diferencialne enačbe 1. reda z ločljivima spremenljivkama.

(b) [**4**] Rešite diferencialno enačbo $y'(x) + 2y(x) = 2$ z začetnim pogojem $y(0) = 2$.