

1. Izpit iz OME

17. januar 2023

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, morebitni pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi in podpisani.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se polarni koordinati izražata s kartezičnima.

(b) V kompleksni ravnini skicirajte območje

$$\mathcal{D} = \{z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 4 < |z| \leq 25\}.$$

(c) Narišite sliko območja, v katerega se območje \mathcal{D} preslika s preslikavo $z \mapsto 3i \cdot z - 2$.

2. [15 točk] Zaporedja in vrste

(a) Zapišite definicijo limite zaporedja.

(b) Naj bo $T(n)$ trditev o naravnem številu $n \in \mathbb{N}$. Vemo, da velja $T(1)$ in da iz resničnosti $T(n)$ sledi resničnost $T(n+3)$. Ali lahko sklepamo, da velja $T(43)$?

(c) Podajte primer kakšnega nekonstantnega konvergentnega zaporedja z limito $2e$.

Podajte primer kakšnega neomejenega zaporedja z zgornjo mejo -1 .

3. [20 točk] Funkcije

(a) Kaj je nivojnica funkcije $f(x, y)$?

(b+c) Skicirajte graf funkcije ene spremenljivke, ki je definirana na $[0, 5) \cup (5, 6]$, zvezna povsod razen v 1, naraščajoča v 2 in za katero velja $\lim_{x \nearrow 5} = -2$. Koliko je točk na \mathbb{R} , v okolici katerih lahko taka funkcija narašča preko vsake meje?

(d) Kaj je razlika med bisekcijo in metodo regula falsi?

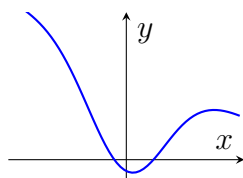
4. [25 točk] Odvod

(a) Podajte definicijo parcialnega odvoda $f_x(a, b)$ funkcije $f(x, y)$.

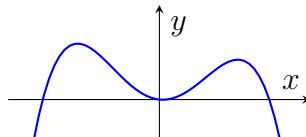
(b) Zapišite formulo za drugi Taylorjev polinom funkcije $f(x)$ v točki 1.

(c) Kakšna je povezava med gradientom funkcije dveh spremenljivk v točki (a, b) in nivojnico skozi (a, b) .

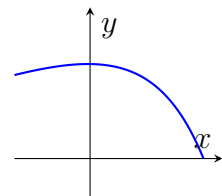
(d) Za funkcije $g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ imamo podane njihove grafe na intervalu $[-3, 3]$.



graf g



graf h



graf k

Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f'(-3) > 0$ in $f''(0) > 0$. Obkrožite graf funkcije f .

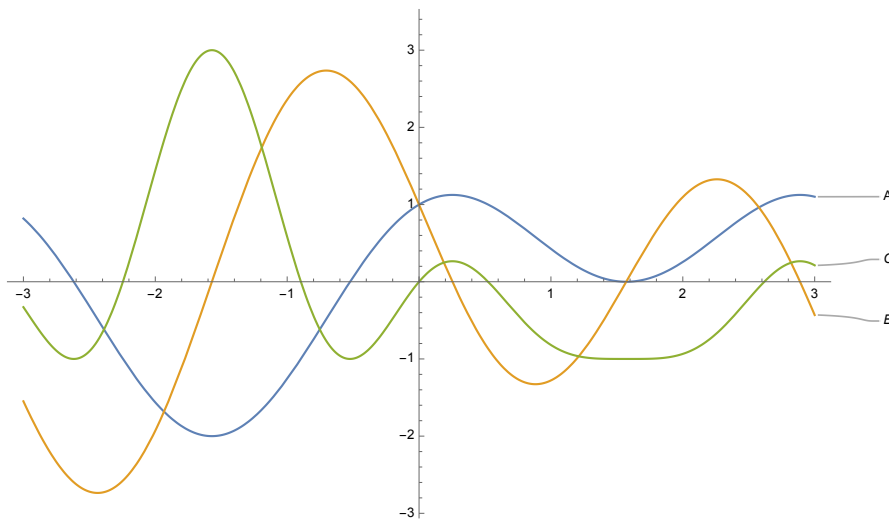
(e) Koliko stacionarnih točk imajo vse tri funkcije f, g, h iz točke (b) skupaj?

5. [25 točk] Integral

(a) Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije.

(b) Zapišite definicijo povprečne vrednosti funkcije f na intervalu $[a, b]$.

(c) Janez je na spodnjo sliko narisal grafe funkcije f , nedoločenega integrala $\int f(x)dx$ ter neke tretje funkcije. Kateri graf predstavlja funkcijo f ?



(d) Naj bodo A, B in C funkcije na zgornji sliki. Določite interval $[a, b]$ tako, da bo $\int_a^b A(x)dx < 0$, $\int_a^b C(x)dx > 0$, integral $\int_a^b B(x)dx$ pa bo približno 0.

(e) Podajte kakšni pozitivni funkciji f_1, f_2 s polom v 0, za kateri velja $\int_0^1 f_1(x)dx < \infty$ ter $\int_0^1 f_2(x)dx = \infty$.