

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

1. Izpit iz OME 24. januar 2024

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, morebitni pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi in podpisani. Vsi deli nalog so enakovredni. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Nariši naslednjo množico točk v kompleksni ravnini: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| < 1\}$.

(b) Nariši sliko območja, v katerega se množica \mathcal{D} preslika s preslikavo $z \mapsto z(1 + i) + i$.

(c) Poišči realni del kompleksnega števila $(1 + i)^{2024}$.

2. [15 točk] Zaporedja in vrste

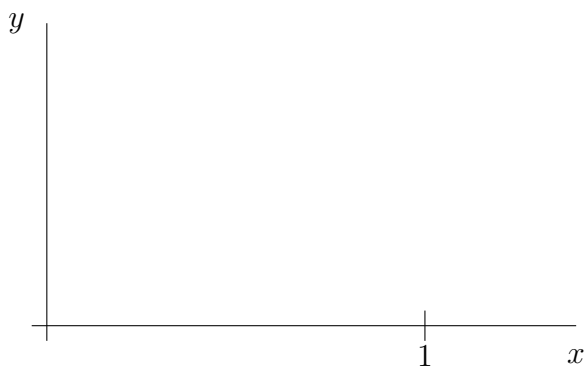
(a) Poišči primer divergentnega zaporedja, ki zavzame natanko tri različne vrednosti.

(b) Kako je definirana vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(c) Naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergira. Ali sledi, da tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira? Utemelji.

3. [20 točk] Funkcije

(a) Skiciraj graf kakšne injektivne funkcije $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana v vsaki točki intervala $[0, 1]$ in ni niti naraščajoča niti padajoča.



(b) Zapiši definicijo limite $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$.

(c) Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[0, 5]$ in naj velja $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = -3$, $f(4) = -4$ ter $f(5) = 0$. Najmanj koliko ničel ima funkcija f na intervalu $[0, 5]$? Utemelji.

(d) Ali limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ obstaja? Če da, jo izračunaj, če ne, utemelji svoj odgovor.

4. [25 točk] Odvod

(a) Ali v vsaki stacionarni točki funkcije ene spremenljivke nastopi lokalni ekstrem? Utemelji.

(b) Napiši definicijo parcialnega odvoda funkcije f dveh spremenljivk v točki (a, b) po spremenljivki x .

(c) Naj bo $f(2, 3) = 4$, $f_x(2, 3) = 2$, $f_y(2, 3) = 4$. Približno določi $f(1.99, 2.02)$.

(d+e) Poišči gradient funkcije $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ v točki $(1, 2)$. Ali funkcija f v smeri vektorja $(3, 4)$ narašča ali pada?

5. [25 točk] Integral in diferencialne enačbe

(a) Poišči primer zvezne funkcije $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni liha, velja pa $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

(b) Zapiši definicijo posplošenega integrala $\int_a^\infty f(x) dx$.

(c) Naj bo Γ gama funkcija. S pomočjo zveze $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ izračunaj $\Gamma(3/2)$ in $\Gamma(5/2)$.

(d) Izračunaj $\iint_{\mathcal{D}} dx dy$, kjer je $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x\}$.

(e) Obkroži graf rešitve logistične diferencialne enačbe $y' = ry(1 - y)$ za $r > 0$.

