

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

## 2. Izpit iz OME

### 7. februar 2019

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

#### 1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) V polarnem zapisu zapišite vsaj tri kompleksna števila  $z$  z lastnostjo  $|2 \cdot z| = 1$ .

(b) Koliko realnih in koliko kompleksnih rešitev ima enačba  $(z^7 - 8)(z^3 + 8) = 0$ ?

(c) Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika  $0 \mapsto 1$  ter  $1 \mapsto 1 + i$ .

2. [10 točk] Zaporedja in vrste

(a) Kdaj je vrsta konvergira?

(b) Podajte primer kakšnega nekonstantnega konvergentnega zaporedja z limito 2.

Podajte primer kakšnega omejenega divergentnega zaporedja s spodnjo mejo 2.

3. [15 točk] Funkcije

(a) Skicirajte graf poljubne funkcije definirane na  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , za katero velja

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = -2, \quad \lim_{x \nearrow -1} f(x) = 1, \quad \lim_{x \searrow -1} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

(b) Za zvezno funkcijo  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  naj velja  $f(-1) = 3$  in  $f(1) = -1$ . Če sta  $-1$  ter  $1$  začetna približka iskanja ničle funkcije  $f$  na  $[-1, 1]$  po sekantni metodi, kateri bo naslednji približek?

(c) Poiščite kakšno elementarno funkcijo dveh spremenljivk, katere definicijsko območje je  $[1, \infty) \times [0, \infty)$ .

4. [30 točk] Odvod

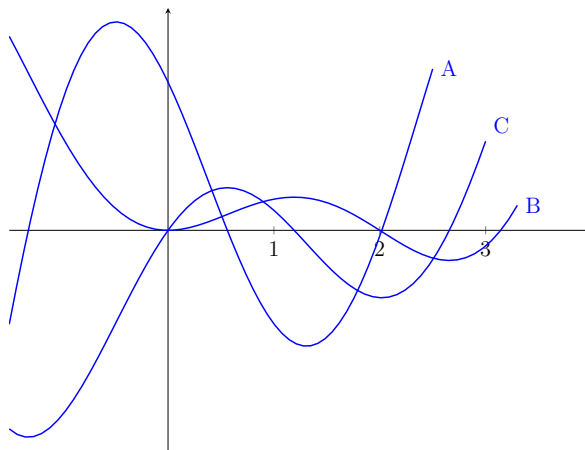
- (a) Zapišite definicijo gradienta funkcije dveh spremenljivk.
  
- (b) Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere gradient v točki  $(1, 1)$  je  $(\pi, -2)$ .
  
- (c) Kako sta povezana gradient funkcije  $f$  ter nivojnice funkcije  $f$ ?
  
- (d) Zapišite definicijo Taylorjeve vrste funkcije ene spremenljivke v točki  $a$ .
  
- (e) Zapišite Taylorjevo vrsto funkcije  $(x - 1)e^x$  okoli  $a = 0$ .
  
- (f) Skicirajte graf kakšne dvakrat zvezno odvedljive funkcije  $f$ , za katero velja  $f(0) > 0$ ,  $f'(1) = f'(-2) = 0$ ,  $f''(2) < 0$ ,  $f(3) < 0$ ,  $f'(4) > 0$ . Kolikšno je najmanjše možno število prevojev take funkcije?

5. [30 točk] Integral

- (a) Zapišite definicijo povprečne vrednosti funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .

(b) Naj bo  $f(x) = \int_0^x (t^3 - t) dt$ . Poiščite stacionarne točke funkcije  $f$ .

(c) Na spodnji sliki so narisani grafi funkcij  $y = f(x)$ ,  $y = f'(x)$  in  $y = f''(x)$ . Zapišite, kateri od grafov A, B, C predstavlja katero od funkcij  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ :



Graf funkcije  $y = f(x)$  je graf \_\_\_\_\_.

Graf funkcije  $y = f'(x)$  je graf \_\_\_\_\_.

Graf funkcije  $y = f''(x)$  je graf \_\_\_\_\_.

(d) Izmed omenjenih treh funkcij iz prejšnje točke poiščite tisto, za katero je njen določeni integral na intervalu  $[1, 2]$  največji.

(e) Naj bo  $f$  soda funkcija, za katero velja  $\int_0^2 f(x) dx = 1$ . Izračunajte  $\int_{-2}^2 (2f(x) + 1) dx$ .

(f) Podajte kakšni funkciji  $f_1, f_2$ , za kateri velja  $\int_0^\infty f_1(x) dx < \infty$  ter  $\int_0^\infty f_2(x) dx = \infty$ .