· Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

2. izpit iz OME, 13.02.2020

- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Matematična indukcija in številske množice**

(a) [**2**] Razložite pojem polarni zapis kompleksnega števila in v polarnem zapisu napišite formulo za potenciranje kompleksnega števila.

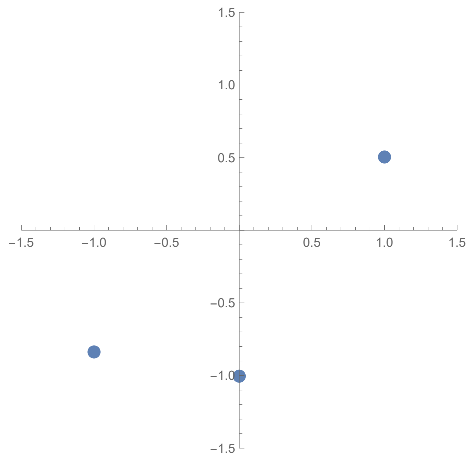
Kompleksno število $z = x + iy \in \mathbb{C}$ v polarnem zapisu podamo kot $z = |z|e^{i\varphi}$, kjer je $|z|$ absolutna vrednost, $\varphi \in [0, 2\pi)$ pa kot, ki ga z oklepa z x-osjo. Formula za potenciranje: $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) i. [**2**] Naj bo dana kompleksna enačba $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, kjer so $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ realna števila, $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pa ena izmed njenih rešitev. Poiščite še eno rešitev te enačbe in dokažite, da gre res za rešitev.

Še ena rešitev enačbe je $\overline{w}$. Dokaz:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i w^i = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i w^i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i w^i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{w}^i = 0.$$

ii. [**1**] Dana je enačba $z^6 - \frac{z^4}{18} - \frac{8z^3}{9} + \frac{17z^2}{16} - \frac{8z}{9} + \frac{305}{144} = 0$. Na spodnji sliki so narisane nekatere njene rešitve. Narišite še ostale. (*Namig:* Enačbe vam ni potrebno reševati.)



Po prejšnji točki je potrebno vse rešitve le zrcaliti čez x-os.

2. [**5 točk**] **Zaporedja in vrste**

(a) [**1**] Napišite definicijo limite zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

$L \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tako da velja $|a_n - L| < \epsilon$ za vsak $n > N_\epsilon$.

(b) i. [**1**] Napišite izrek o sendviču za limite zaporedij.

Naj za zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, $L \in \mathbb{R}$. Potem je $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

ii. [**1**] Naj bosta dani vrsti $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kjer je $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ in $b_n = \frac{1}{2^n}$. Koliko sta njuni vsoti A in B?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{3}{2} = 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

iii. [**2**] Naj bo $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kjer je $c_n \in \{a_n, b_n\}$. Npr., $c_0 = b_0, c_1 = a_1, c_2 = b_2, c_3 = a_3, \ldots$ Navzgor in navzdol omejite vsoto vrste C s pomočjo A in B. Odgovor dobro utemeljite.

Če primerjamo a_n z b_n, ugotovimo $a_n < b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Res, $\frac{2}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 2^{n+1} < 3^{n+1}$. Ker je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je $A \leq C \leq B$.

3. [**5 točk**] **Funkcije**

(a) [**1**] Napišite definicijo leve limite funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

$L \in \mathbb{R}$ je leva limita funkcije f v x_0 natanko tedaj, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz $x_0 - x < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(b) [**1**] Napišite primer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z levo in desno limito v točki $x = 0$, ki se med seboj razlikujeta.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \geq 0, \\ -1, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

(c) [**3**] Poiščite primere funkcij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo:

i. [**1**] g ni zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}$, $f \circ g$ pa je zvezna v točki a.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \geq a, \\ -1, & \text{za } x < a. \end{cases}, \quad f(x) = 1 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

ii. [**1**] $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x)$ obstaja, $\lim_{x\to 0} f(x)$ pa ne.

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \geq 0, \\ -1, & \text{za } x < 0. \end{cases}$, $g(x) = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

iii. **[1]** $\lim_{x \to 0} g(x)$ obstaja, $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x)$ pa ne.

$g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. **[5 točk] Odvod**

(a) **[1]** Napišite definicijo nivojnice funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Za $k \in \mathbb{R}$ je nivojnica $\mathcal{N}_k$ funkcije f množica $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x, y) = k\}$.

(b) **[1]** Napišite definicijo vezanega ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pri pogoju $g(x, y) = 0$, kjer je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija.

Vezan ekstrem funkcije f je vsaka točka $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, kjer je vrednost $f(x_0, y_0)$ maksimalna ali pa minimalna med vsemi vrednostmi $f(x, y)$, pri čemer (x, y) zadošča pogoju $g(x, y) = 0$.

(c) **[3]** Naj bo dana funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - 3xy + 3y^2$. Za vsakega od naslednjih pogojev $g(x, y) = 0$ ugotovite, ali vezani ekstremi za f obstajajo ali ne. Odgovore dobro utemeljite, ekstremov pa ni potrebno natančno izračunati.

i. **[1]** $g(x, y) = f(x, y) - 10$.

Vse točke so ekstremne, saj je $g(x, y) = 0$ ravno nivojnica funkcije f za vrednost 10.

ii. **[1]** $g(x, y) = y - x$.

Iz $g(x, y) = 0$ sledi $x = y$. Torej iščemo ekstreme $f(x, x) = x$. Ti pa ne obstajajo.

iii. **[1]** $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Množica rešitev $g(x, y) = 0$ je krožnica. To pa je omejena in zaprta množica. Ker je $f(x, y)$ zvezna funkcija, ima ekstreme na krožnici.

5. **[5 točk] Integral**

(a) **[1]** Napišite definicijo določenega integrala funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$I \in \mathbb{R}$ je določen integral funkcije f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsako delitev $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ intervala $[a, b]$, ki zadošča $x_{i+1} - x_i < \delta$, $i = 0, \ldots, n$, in vsako izbiro točk $x_i' \in [x_i, x_i + 1]$, $i' = 0, \ldots, n$, velja $|\sum_{i=0}^{n} f(x_i')(x_{i+1} - x_i) - I| < \epsilon$.

(b) **[1]** Napišite definicijo posplošenega integrala $\int_1^\infty f(x)dx$ funkcije $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ in podajte primer funkcije, za katero obstaja.

$I \in \mathbb{R}$ je posplošen integral $\int_1^\infty f(x)dx$ funkcije f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{R}$, tako da velja $|\int_1^a f(x)dx - I| < \epsilon$ za vsak $a > N$.

(c) [**1.5**] Ali obstaja *zvezna* funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, za katero obstaja določen integral $\int_0^1 f(x)dx$, f pa nima pa primitivne funkcije na intervalu $(0,1)$? Če je odgovor da, podajte primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Taka funkcija f ne obstaja, saj po osnovnem izreku integralskega računa je $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu $(0,1)$.

(d) [**1.5**] Ali obstaja zvezna funkcija $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, ki ima primitivno funkcijo, ne obstaja pa določen integral $\int_0^1 \widetilde{f}(x)dx$ za nobeno razširitev $\widetilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcije f? Če je odgovor da, podajte primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Taka funkcija je $f(x) = \frac{1}{x}$.

6. [**5 točk**] **Diferencialne enačbe**

(a) [**1**] Napišite definicijo ortogonalnih trajektorij na dano družino krivulj.

Ortogonalna trajektorija je krivulja, ki je v vsaki točki pravokotna na neko krivuljo iz dane družine.

(b) [**4**] Poiščite ortogonalne trajektorije na družino parabol $\dfrac{y^2}{x} = a$, kjer je parameter $a \in \mathbb{R}$ realen.

i. Odvajamo enačbo: $y^2 = ax \Rightarrow 2yy' = a$.
ii. Znebimo se parametra: $2yy' = \frac{y^2}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{2x}$.
iii. Zamenjamo y' z $-\frac{1}{y'}$: $y' = -\frac{2x}{y}$.
iv. Rešimo dobljeno DE: $ydy = -2xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x^2 + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = C$.