

2. Izpit iz OME

27. januar 2023

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, morebitni pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi in podpisani.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Za vsa števila $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ izračunajte $e^{in\pi/4}$. Dobljena števila vpišite v kompleksno ravnino.

(b) V kompleksni ravnini skicirajte območji:

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1, \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z - i| = 1, \operatorname{Im}(iz) < 0\}.$$

(c) Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

2. [15 točk] Zaporedja in vrste

(a) Zapišite definicijo konvergentne vrste.

(b) Izračunajte delno vsoto $\sum_{n=0}^{20} 2^n$.

(c) Podajte primer neomejenega zaporedja, ki ne narašča preko vsake meje.

3. [15 točk] Funkcije

(a) Zapišite definicijo padanja pod vsako mejo, t.j., izraza $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

(b) Naj bo $f: (1, 7) \cup (7, 11) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja $1 = f(2) = f(4) + 4 = f(6) - 6 = f(8) + 8 = f(10) - 10$. Kolikšno je najmanjše možno število ničel takšne funkcije.

(c) Kaj je razlika med grafom $f(x, y)$ ter nivojnico?

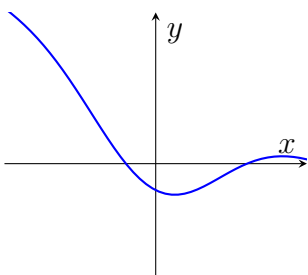
4. [30 točk] Odvod

(a) Podajte definicijo gradienta funkcije $f(x, y, z)$ v točki (a, b, c) .

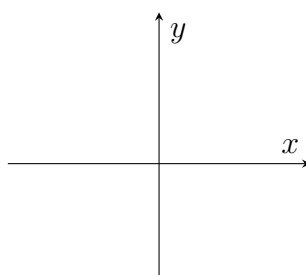
(b) Zapišite Taylorjevo vrsto funkcije $e^x + (x + 1)^2$.

(c) Utemeljite, ali je vsak vezani ekstrem funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 0$ tudi stacionarna točka funkcije f .

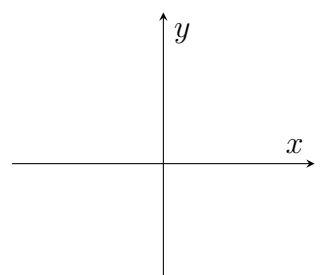
(d + e) Podan je graf funkcije $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$. V drugi koordinatni sistem skicirajte graf $f'(x)$, v tretjega pa $\int_{-1}^x f(t)dt$.



graf f



graf f'



graf $\int_{-1}^x f(t)dt$

(f) Poiščite kakšno eksplicitno podano funkcijo dveh spremenljivk, katere parcialna odvoda v točki $(0, -1)$ sta 1 in 2.

5. [25 točk] Integral

(a+b) Zapišite definicijo določenega integrala funkcije f na intervalu $[a, b]$.

(c) Zakaj pri izračunu nedoločenega integrala na koncu dodamo konstanto?

(d) Skicirajte graf funkcije $f(x)$, za katero velja $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_1^2 f(x)dx = -2$ ter $\int_{-2}^2 f(x)dx = 0$.

(e) Izračunajte $\iint_{[0,1]^2} x \, dx \, dy$.