

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

2. izpit iz OME 7. februar 2024

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, morebitni pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi in podpisani. Vsi deli nalog so enakovredni. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Nariši naslednjo množico točk v kompleksni ravnini:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

(b) Nariši sliko območja, v katerega se \mathcal{D} preslika s preslikavo $z \mapsto \frac{z(1-i)}{\sqrt{2}}$.

(c) Naj bo $z = e^{i\pi/6}$. Izračunaj $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + z^{10} + z^{11}$.

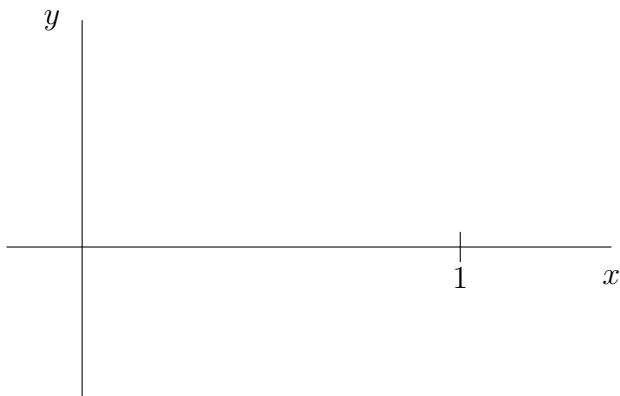
2. [15 točk] Zaporedja in vrste

(a) Ali je omejeno zaporedje vedno konvergentno? Dokaži ali poišči protiprimer.

(b+c) Poišči primera zaporedij a_n in b_n , za kateri velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ (preveri z računoma), pri tem pa vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pa divergira.

3. [20 točk] Funkcije

(a) Skiciraj graf kakšne funkcije $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana v vsaki točki intervala $[0, 1]$, nima ničle na tem intervalu in velja $f(0) \cdot f(1) < 0$.



(b) Zapiši definicijo leve limite $L = \lim_{x \uparrow a} f(x)$.

(c+d) V ravnini nariši definicijsko območje funkcije $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$. Ali je ta funkcija navzgor omejena? Navzdol omejena? Utemelji.

4. [25 točk] Odvod

(a) Ali je vsaka zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v vsaki točki? Utemelji.

(b+c) Napiši definicijo smernega odvoda funkcije f dveh spremenljivk v točki (a, b) v smeri vektorja $\vec{s} = (c, d)$. Kolikšen je smerni odvod v smeri gradienta funkcije f v točki (a, b) ?

(d+e) Ali je točka $(-1, 2)$ stacionarna točka funkcije $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 5y + 2024$? Če je, ugotovi, ali v njej nastopi lokalni minimum ali lokalni maksimum.

5. [25 točk] Integral in diferencialne enačbe

(a+b) Izračunaj $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx dy$, kjer je $\mathcal{D} = [-1, 1] \times [0, 2]$.

(c) Naj bo Γ gama funkcija. Izračunaj $\Gamma(2024)/\Gamma(2025)$.

(d) Ali je funkcija $y = \sin x$ rešitev diferencialne enačbe $y^2 + (y')^2 = 1$? Utemelji.

(e) Na sliki je fazni portret gibanja. Določi predznaka odvodov \dot{x} in \dot{y} v točki $(0, -2)$.

