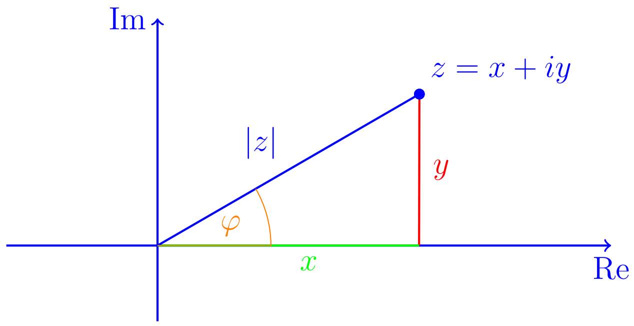
Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

3. Izpit iz OME
21. avgust 2019

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [**15 točk**] **Kompleksna števila**

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se polarni koordinati izražata s kartezičnima.

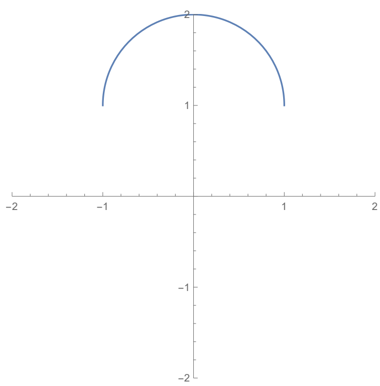
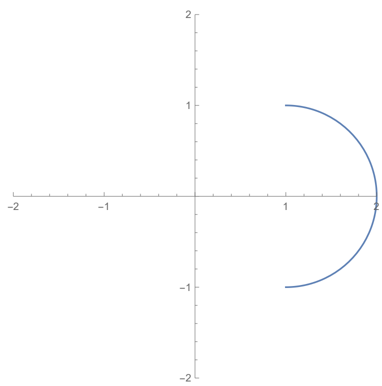


Polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$ je zapis z s pomočjo oddaljenosti od izhodišča $|z|$ in polarnim kotom φ, ki ga kompleksno število oklepa z x-osjo. Velja $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $\tan\varphi = \frac{y}{x}$.

(b) V kompleksni ravnini skicirajte območji:

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z - i| = 1, \mathrm{Im}(z) > 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1, \mathrm{Re}(z) > 1\}$$

(c) Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Levo sliko moramo zavrteti za $\frac{\pi}{2}$ v negativni smeri, da iz $\mathcal{A}$ pridemo v $\mathcal{B}$. Torej je ustrezna kompleksna funkcija $f(z) = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

2. **[10 točk] Zaporedja in vrste**

(a) Na primeru razložite razliko med infimumom ter spodnjo mejo zaporedja.

Spodnja meja zaporedja $\{a_n\}_n$ je vsako število $x \in \mathbb{R}$, ki zadošča $x \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Infimum pa je največja izmed vseh spodnjih mej.

Primer: $a_n = \frac{1}{n}$. Spodnje meje so vsa nepozitivna števila, infimum pa je 0.

(b) Poiščite kakšno konvergentno vrsto z vsoto 2.

Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ je geometrijska vrsta z začetnim členom $a = 1$, kvocientom $q = \frac{1}{2}$ in vsoto $\frac{1}{1-q} = 2$.

3. **[15 točk] Funkcije**

(a) Za zvezno funkcijo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj velja

$$h(0) = h(1) = -3, \quad h(-2) = h(-1) = h(3) = 1, \quad h(2) = \sqrt{2}.$$

Kolikšno je najmanjše število ničel take funkcije?

Na vsakem intervalu, kjer je funkcija različno predznačena v krajiščih, obstaja vsaj ena njena ničla. Funkcija h ima tako vsaj eno ničlo na intervalih $[-1, 0]$ in $[1, 2]$.

(b) Definirajte kakšno funkcijo, za katero obstaja leva limita v 0, desna pa ne.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

(c) Definirajte nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk ter podajte kak primer.

Nivojske krivulje $\mathcal{N}_c, c \in \mathbb{R}$, funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so krivulje, kjer ima funkcija f konstantno vrednost enako c, tj.

$$\mathcal{N}_c = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x, y) = c\right\}.$$

Primer. $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nivojske krivulje so

$$\mathcal{N}_c = \begin{cases} \emptyset, & c < 0, \\ \text{krožnica s središčem v } (0,0) \text{ in polmerom } \sqrt{c}, & c \geq 0. \end{cases}$$

4. **[30 točk] Odvod**

(a) Zapišite definicijo smernega odvoda funkcije dveh spremenljivk.

Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0, y_0)$ funkcije $f(x, y)$ v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ v točki (x_0, y_0) je enak

$$f_{\vec{e}}(x_0, y_0) = e_1 f_x(x_0, y_0) + e_2 f_y(x_0, y_0).$$

(b) Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere smerni odvod v točki $(1, 1)$ v smeri $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ je enak 1.

Poskusimo kar z linearno funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by$. Velja $f_x(1, 1) = a$ in $f_y(1, 1) = b$. Veljati mora

$$f_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b = 1.$$

Izberemo lahko npr. $a = \sqrt{2}$ in $b = 0$, tj. $f(x, y) = \sqrt{2}x$.

(c) Zapišite definicijo Hessejeve matrike funkcije dveh spremenljivk.

Hessejeva matrika funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki $P \in \mathbb{R}^2$ je enaka $\begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{bmatrix}$.

(d) Kakšna je povezava med Hessejevo matriko funkcije f dveh spremenljivk ter lokalnimi ekstremi funkcije f?

Če je P stacionarna točka dvakrat zvezno odvedljive funkcije f, tj.

$$f_x(P) = f_y(P) = 0,$$

Hessejeva matrika v točki P je definitna, tj.

$$f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2 > 0,$$

in velja

- $f_{xx}(P) > 0$, potem je P lokalni minimum funkcije f.
- $f_{xx}(P) < 0$, potem je P lokalni maksimum funkcije f.

(e) Za zvezno odvedljivo funkcijo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj velja

$$g(-1) = 0, \quad g'(1) = g(1) = g(2) = g(3) = g'(3) = g(4) = 2, \quad g(5) = 3.$$

Kolikšno je najmanjše število stacionarnih točk take funkcije?

Funkcija g ima na vsakem od intervalov $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ lokalni ekstrem, ki je stacionarna točka. Ločimo dve možnosti:

- Če ima na intervalu $[3, 4]$ funkcija f le en lokalni ekstrem, potem je $g'(4) < 0$, saj je $g'(3) > 0$ in g' lahko samo enkrat spremeni predznak na $[3, 4]$. Ker je $g(5) > g(4)$, mora nekje na intervalu $[4, 5]$ funkcija naraščati, tako da je tam g' pozitiven. Torej tudi na intervalu $[4, 5]$ odvod g' vsaj enkrat spremeni predznak. Obstajajo torej vsaj 4 stacionarne točke.

- Če ima na intervalu $[3,4]$ funkcija f vsaj dva lokalna ekstrema, potem obstajajo vsaj 4 stacionarne točke.

V obeh zgornjih primerih lahko najdemo funkcijo, ki ima natanko 4 stacionarne točke.

(f) Kaj je vezani ekstrem funkcije f pri pogoju $g(x,y)=0$?

Vezani ekstrem funkcije f je vsaka točka $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, kjer je vrednost $f(x_0,y_0)$ maksimalna ali pa minimalna med vsemi vrednostmi $f(x,y)$, pri čemer (x,y) zadošča pogoju $g(x,y)=0$.

5. **[30 točk] Integral**

(a) Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije.

Nedoločeni integral funkcije $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je funkcija $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, ki za vsak $x\in(a,b)$ zadošča pogoju $F'(x)=f(x)$.

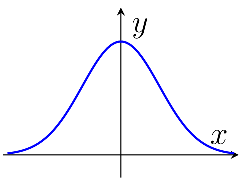
(b) Naj bo f soda funkcija, za katero velja $\int_0^1 f(x)dx=1$. Izračunajte $\int_{-2}^2 f(x/2)dx$.

Velja

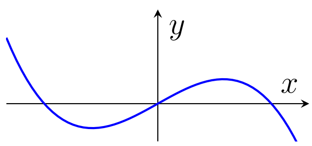
$$\int_{-2}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_{-1}^{1} f(t)\,(2dt)=4\int_{0}^{1} f(t)\,dt=4,$$

kjer smo v prvi enakosti uvedli substitucijo $t=\frac{x}{2}$, v drugi pa upoštevali, da zaradi sodosti funkcije f velja $\int_0^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt$.

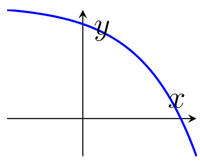
(c) Za funkcije $g,h,k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ imamo podane grafe njihovih **integralov** na intervalu $[-3,3]$.



graf $\int g(x)dx$



graf $\int h(x)dx$



graf $\int k(x)dx$

Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f(0)<0$. Obkrožite graf funkcije f?

Pravilna je funkcije k. Vrednost $f(0)$ je namreč enaka vrednosti odvoda funkcije $\int f(x)dx$ v točki 0 oz. smernem koeficientu tangente na graf funkcije $\int f(x)dx$ v točki 0. Ta je negativen samo v primeru funkcije k.

(d) Naj bo f funkcija iz prejšnje točke. Za vsako izmed vrednosti $f'(-3), f'(3)$ določite, ali je pozitivna, negativna, ali enaka 0.

Funkcija f' je enaka drugemu odvodu funkcije $\int f(x)dx$. Ker je slednja konkavna na intervalu $[-3,3]$, je f' negativna na $[-3,3]$.

(e) Zapišite formulo za prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli osi x na intervalu $[a,b]$.

Volumen je enak določenemu integralu $\displaystyle\int_a^b (\pi f(x)^2)dx$.

(f) Podajte kakšni funkciji f_1, f_2 s polom v 0, za kateri velja $\int_0^1 f_1(x)dx < \infty$ ter $\int_0^1 f_2(x)dx = \infty$.

Za $f_1(x) = \ln x$ velja

$$\int_0^1 f_1(x)dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^1 f_1(x)dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} [x(\ln x - 1)]_\epsilon^1 = -1,$$

kjer smo upoštevali $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$ (per partes) in

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

(V drugi enakosti smo uporabili l'Hospitalovo pravilo).

Za $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ velja

$$\int_0^1 f_2(x)dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^1 f_2(x)dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} [-\ln x]_\epsilon^1 = \infty.$$