· Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

3. izpit iz OME, 19.08.2020

- Čas pisanja: **40 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[30 točk] Zaporedja in vrste**

(a) [**8**] Zapišite Leibnitzov kriterij o konvergenci alternirajočih vrst.

Alternirajoča vrsta $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, konvergira, če je zaporedje a_n monotono padajoče in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Naj bo dano zaporedje $\{a_n\}_n$, $n \geq 1$, s predpisom

$$a_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & n \text{ je deljiv s } 3, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ima ostanek 1 pri deljenju s } 3, \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ ima ostanek 2 pri deljenju s } 3. \end{cases}$$

i. [**6**] Zapišite prvih 6 členov zaporedja $\{a_n\}_n$.

$a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = (\frac{4}{3})^3$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, $a_6 = (\frac{7}{6})^6$.

ii. [**8**] Poiščite neko konvergentno podzaporedje $\{b_n\}_n$ zaporedja $\{a_n\}_n$, ki ima pozitivno limito. Odgovor dobro utemeljite.

Podzaporedje $a_3, a_6, a_9, \ldots$ je podzaporedje zaporedja $(1+\frac{1}{n})^n$, ki ima limito e. Torej je podzaporedje $b_n = a_{3n}$ primer iskanega podzaporedja.

iii. [**8**] Poiščite neko podzaporedje $\{c_n\}_n$ zaporedja $\{a_n\}_n$, tako da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira. Odgovor dobro utemeljite.

Podzaporedje $a_1, a_2, a_3, a_5, \ldots$ je alternirajoče zaporedje, ki zadošča pogojem Leibnitzovega izreka in je zato konvergentno.

2. **[30 točk] Funkcije in ekstremi**

Naj bosta dani funkciji

$$f(x,y) = \tan(\log(\sqrt{2-x^2-y^2})) \quad \text{in} \quad g(x,y) = 5 + x^2 + 2y^2.$$

(a) **[6]** Zapišite definicijo nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk.

Za poljubo realno število $c \in \mathbb{R}$ je nivojska krivulja funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ množica točk $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon f(a,b) = c\}$.

(b) **[8]** Določite nivojsko krivuljo funkcije f skozi točko $(1,0)$ in jo narišite.

$$f(1,0) = \tan(\log(\sqrt{2-1^2-0^2})) = \tan(\log(1)) = \tan(0) = 0.$$

Torej iščemo točke $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tako da velja $f(a,b) = \tan(\log(\sqrt{2-a^2-b^2})) = 0$. Za vse točke pri nalogi je bilo zadosti upoštevati, da je $\tan(0) = 0$ in $\log(1) = 0$. Torej $\sqrt{2-a^2-b^2} = 1$ oz. $a^2 + b^2 = 1$ in tako je del nivojnice krožnica.

Opomba: Sicer je za popolno rešitev potrebno upoštevati, da je $\tan(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = k\pi$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. Zato mora biti $\log(\sqrt{2-a^2-b^2}) = k\pi$ oz. $2 - a^2 - b^2 = e^{2k\pi}$ oz. $2 - e^{2k\pi} = a^2 + b^2$. Nivojnica je tako unija krožnic s središči v izhodišču in polmeri $\sqrt{2 - e^{2k\pi}}$. Polmeri so realni samo za $k \leq 0$.

(c) **[6]** Zapišite definicijo vezanega ekstrema funkcije g pri pogoju $f(x,y) = 0$.

Vezani ekstremi funkcije g pri pogoju $f(x,y) = 0$ so največje in najmanjše vrednosti funkcije g na nivojnici funkcije f pri vrednosti 0.

(d) **[10]** Določite vezane ekstreme funkcije g pri pogoju $f(x,y) = 0$.

Nasvet: Vpeljite novi spremenljivki $a := x^2$, $b := y^2$. Pogoj $f(x,y) = 0$ in definicijo funkcije $g(x,y)$ zapišite s spremenljivkama a in b. S tem se iskanje vezanih ekstremov zelo poenostavi.

Za vse točke je bilo zadosti reševati na delu nivojnice $x^2 + y^2 = 1$ oz. po substituciji $a + b = 1$, kjer $a, b \geq 0$. Izrazimo $a = 1 - b$ in vstavimo v $g(a,b) = 5 + a + 2b = 6 + b$. Največjo vrednost dobimo za $b = 1$, najmanjšo pa za $b = 0$.

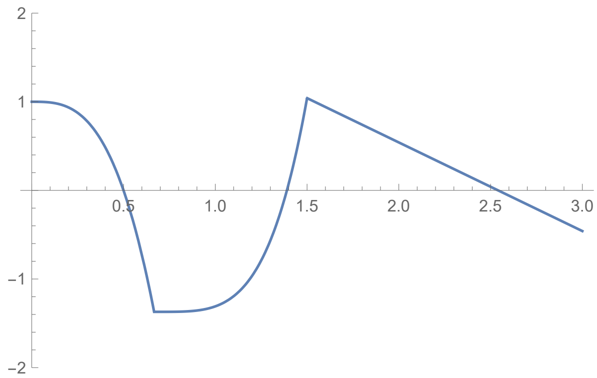
Opomba: Za popolno rešitev moramo pogledati še ostale krožnice na nivojnici $f(x,y) = 0$, tj. $x^2 + y^2 = 2 - e^{2k\pi}$ za nek $k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$. Po substituciji dobimo $a + b = 2 - e^{2k\pi}$, od koder lahko izrazimo eno od spremenljivk, npr. $a = 2 - e^{2k\pi} - b$. Vstavimo v $g(a,b) = 5 + a + 2b = 7 - e^{2k\pi} + b$. Ker je $b \in [0, 2 - e^{2k\pi}]$, je $7 - e^{2k\pi} \leq g(a,b) \leq 9 - 2e^{2k\pi}$. Za $b = 0$ dobimo tako vazani lokalni minimimum, za $b = 2 - e^{2k\pi}$ pa vezani lokalni maksimum.

3. [**40 točk**] **Odvod in integral**

(a) [**6**] Zapišite definicijo globalnega maksimuma funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

Število $M \in \mathbb{R}$ je globalni maksimum funkcije f, če je $f(x_0) = M$ za nek $x_0 \in [a, b]$ in velja $f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$.

(b) [**6**] Na naslednji skici je narisan graf odvoda neke odvedljive funkcije $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$. Označite x-koordinate točk, ki so kandidati za globalni **maksimum**.

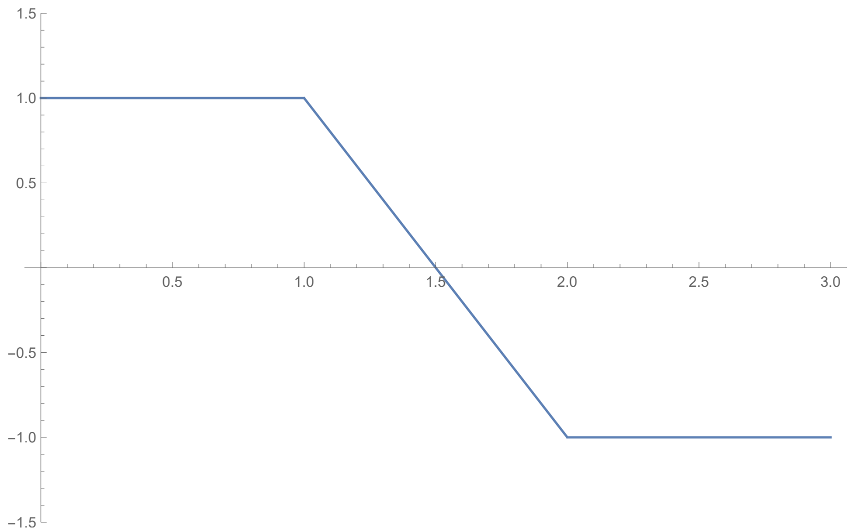


Kandidata sta ničli odvoda pri 0.5 in 2.5. Odvod mora biti levo od maksimuma namreč pozitiven, desno pa negativen.

(c) [**6**] Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

Nedoločen integral je funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in (a, b)$ zadošča pogoju $F(x)' = f(x)$.

(d) [**8**] Na naslednji skici je narisan graf neke funkcije $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$. Na skico narišite enega izmed njenih nedoločenih integralov.



Po osnovnem izreku integralskega računa je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eden izmed nedoločenih integralov funkcije f. Torej je treba vrisati graf funkcije, ki v vsaki točki poda vrednost predznačene ploščine pod grafom f. Na intervalu $[0, 1]$ je to del premice z naklonom 1, na $[2, 3]$ del premice z naklonom -1, ki ima v $x = 3$ vrednost 0, na [2,3] pa gre za navzdol obrnjeno parabolo, ki zvezno nadaljuje daljici iz obeh intervalov.

(e) **[6]** Zapišite definicijo konveksnosti funkcije na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

Funkcija je konveksna, če za vsak par števil $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, velja

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

za vsak $t \in [0, 1]$. Z besedami: Na vsakem intervalu $[x_1, x_2]$ graf funkcije leži pod daljico, ki povezuje točki $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$. Za vse točke je zadoščalo napisati eno od definicij.

(f) **[8]** Narišite dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f : [0, 5) \to \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim pogojem:

- $f'(x) < 0$ za $x \in (0, 2)$.
- $f'(x) > 0$ za $x \in (2, 4) \cup (4, 5)$.
- $f''(x) < 0$ za $x \in (0, 1) \cup (3, 4)$.
- $f''(x) > 0$ za $x \in (1, 3) \cup (4, 5)$.
- f je navzgor neomejena.

Katera koli funkcija, ki je padajoča na intervalu (0,2), naraščajoča na $(2, 4) \cup (4, 5)$, konkavna na $(0, 1) \cup (3, 4)$, konveksna na $(1, 3) \cup (4, 5)$, ter zadošča $\lim_{x\to 5} f(x) = \infty$, je ustrezna.