DODATEK C

Funkcije več spremenljivk

C.1. Osnovni pojmi

Funkcija n spremenljivk je predpis:

$$\begin{aligned} f\colon \quad & \mathcal{D}_f && \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, \dots, x_n) && \mapsto u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

kjer $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ imenujemo *definicijsko območje* funkcije f.

Graf funkcije dveh spremenljivk je množica točk (ploskev)

$$\Gamma = \{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$

v $\mathbb{R}^3$.

Nivojska krivulja funkcije $f(x, y)$ je krivulja v $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$, podana z enačbo $f(x, y) = c$.

Nivojske krivulje določajo *razslojitev* definicijskega območja $\mathcal{D}$: vsaka točka $(x, y) \in \mathcal{D}$ leži na natanko eni nivojski krivulji. Nivojske krivulje so denimo tudi

- izohipse (nivojske krivulje nadmorske višine na geografskih kartah),
- izobare (nivojske krivulje tlaka na vremenskih kartah),
- izoterme (nivojske krivulje temperature na vremenskih kartah).

C.2. Limita funkcij (neobvezno)

L je *limita* funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a, b), če je vrednost $f(x, y)$ poljubno blizu L, če je le (x, y) dovolj blizu (a, b) (a nujno ne enak (a, b)). Formalno:

Število L je *limita* funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, za vsako točko (x, y) v krogu s polmerom δ okrog točke (a, b).

Krog s polmerom δ okrog (a, b) je množica vseh takšnih točk (x, y), da velja

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2.$$

Funkcija $f(x,y)$ je *zvezna* v točki (a,b), če je
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

C.3. Odvodi funkcije več spremenljivk

Parcialni odvod funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ v točki (a,b) definiramo kot
$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$
$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Parcialni odvod funkcije več spremenljivk $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ v točki $\mathbf{a} = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ definiramo kot
$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Parcialni odvod po x v točki (x_0,y_0)

- je relativna sprememba odvisne spremenljivke pri zelo majhni spremembi spremenljivke x, kjer so ostale spremenljivke fiksne,
- meri občutljivost funkcijske vrednosti na majhne napake ali spremembe v vrednosti x_0,
- je smerni koeficient tangente na krivuljo, ki jo dobimo, če graf funkcije prerežemo vzdolž ravnine $y = y_0$.

Parcialni odvodi 2. reda funkcije f v točki (a,b):
$$f_{xx}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad f_{xy}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b),$$
$$f_{yx}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \quad f_{yy}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

Smerni odvod funkcije f v točki (x_0,y_0) v smeri enotskega vektorja $\vec{e}$ je enak
$$f_{\vec{e}}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)e_1 + f_y(x_0,y_0)e_2.$$

Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0,y_0)$ je relativna sprememba funkcijske vrednosti $f(x_0,y_0)$ ob majhnem premiku iz točke v smeri vektorja $\vec{e}$.

C.4. Uporaba odvoda

C.4.1. Linearna aproksimacija funkcij več spremenljivk. Vrednost funkcije f lahko v točki blizu (x_0, y_0) ocenimo z vrednostjo $f(x_0, y_0)$ kot

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \cong f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Če je f zvezno parcialno odvedljiva v (x_0, y_0), je *totalni diferencial*

$$df = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

linearna ocena za spremembo funkcijske vrednosti f: $df \cong \Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$.

C.4.2. Naraščanje in padanje funkcije. Naj bo $f = f(x, y)$ funkcija dveh spremenljivk. Če je $f_x(x_0, y_0) > 0$, f ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi x, narašča. Če je $f_y(x_0, y_0) > 0$, f ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi y, narašča.

Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0, y_0)$ opisuje relativno spremembo funkcijske vrednosti $f(x, y)$, ko se iz točke (x_0, y_0) malo premaknemo v smeri vektorja $\vec{e}$.

Če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) > 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e}$ narašča. Če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) < 0$, potem f ob majhnem pomiku iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e}$ pada.

Ob majhnem pomiku is točke (x_0, y_0) bo smerni odvod največji v smeri vektorja

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Vektor

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

imenujemo *gradient* funkcije f v točki (x_0, y_0).

Gradient kaže v smeri pravokotno na nivojske krivulje.

C.4.3. Stacionarne točke funkcije več spremenljivk. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija več spremenljivk.

Točka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je *stacionarna* (ali *kritična*) točka funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, če je

$$\operatorname{grad}\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

Če je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva, potem v stacionarni točki (a, b) velja:

- totalni diferencial $df = 0$,
- za vsak dovolj majhen vektor (h, k) je sprememba funkcijskih vrednost $\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$ zelo majhna,

- smerni odvod $f_{\vec{v}}(a,b) = 0$ v vsaki smeri $\vec{v}$,
- tangenta ravnina na graf je vodoravna.

Če za vse točke (x,y), ki so "dovolj blizu"točke (a,b) (tj. $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon$ za nek dovolj majhen ε) velja

- $f(x,y) \leq f(a,b)$, ima funkcija f v točki (a,b) *lokalni maksimum*.
- $f(x,y) \geq f(a,b)$, ima funkcija f v točki (a,b) *lokalni minimum*.

Podobno definiramo lokalne ekstreme funkcije n spremenljivk.

Če je f parcialno zvezno odvedljiva, ima lahko lokalne ekstreme le v stacionarnih točkah.

Torej je potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije f v točki (a,b):

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$

DODATEK D

Diferencialne enačbe

D.1. Definicije

Diferencialna enačba je enačba, ki povezuje neodvisno spremenljivko, odvisno ter njene odvode:
$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0,$$
če je $x = x(t)$ ali
$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$
če je $y = y(x)$.
Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda.

Rešitev diferencialne enačbe je (dovoljkrat odvedljiva) funkcija, ki zadošča enačbi.

Splošna rešitev diferencialne enačbe reda n je družina funkcij, odvisna od n parametrov, ki so vse rešitve diferencialne enačbe.
Partikularna rešitev je neka posamezna rešitev iz te družine.

Če imamo poleg diferencialne enačbe podanih tudi n začetnih pogojev
$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$
potem dobimo eno samo rešitev diferencialne enačbe.

D.2. Diferencialna enačba 1. reda z ločljivima spremenljivkama

Diferencialna enačba 1. reda, ki ima obliko
$$y'(x) = f(x)g(y),$$
se imenuje *enačba z ločljvima spremenljivkama*.

Enačbo rešimo tako, da vpeljemo $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ in *ločimo spremenljivki*. Iz
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
dobimo
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Integriramo vsako stran zase

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

in izrazimo y=y(x).

D.3. Ortogonalne trajektorije

Naloga: za dano družino krivulj poiščimo drugo družino krivulj z lastnostjo, da je vsaka krivulja prve družine pravokotna na vsako krivuljo druge družine. Drugo družino s to lastnostjo imenujemo *ortogonalna trajektorija* prve družine.

(1) Družino krivulj opišemo z diferencialno enačbo prvega reda: odvajamo na x in eliminiramo a.
(2) V diferencialni enačbi prve družine y' nadomestimo z $-\dfrac{1}{y'}$.
(3) Rešimo novo diferencialno enačbo druge družine.

D.4. Linearna diferencialna enačba prvega reda

Linearna diferencialna enačba prvega reda je diferencialna enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{1}$$

Pravimo, da je enačba *homogena*, če je $g(x) = 0$ in*nehomogena*, če je $g(x) \neq 0$.
Linearno diferencialno enačbo prvega reda rešimo v dveh korakih:

(1) Rešimo *homogeni del* $y' + f(x)y = 0$ s pomočjo ločitve spremenljivk. Dobimo rešitev

$$y = Ce^{-\int f(x)dx} = C\,z(x)$$

(2) Metoda *variacije konstante*
- V (1) vstavimo $y = C(x)\,z(x)$ in rešimo na $C(x)$.
- Tako dobljeni C vstavimo v rešitev homogenega dela.