

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Izpit iz Osnov matematične analize

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [20 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.

(b) Zapišite pravilo za množenje kompleksnih števil v polarni obliki.

(c) V kompleksni ravnini narišite števili $z = 1 + i$ in $w = \frac{1}{2}(1 - i)$ in ju zapišite v polarni obliki.

(d) Izračunajte $z^5 w^3$ in ga narišite v kompleksni ravnini v točki (c).

2. [20 točk] Vrste

(a) Kaj je delna vsota vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$? Zapišite prve tri delne vsote vrste $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$.

(b) Kdaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira?

(c) Kaj lahko poveste o konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v naslednjih primerih?

Če velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ _____ .

Če velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ _____ .

(d) Ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$ konvergira? Zakaj?

3. [20 točk] Funkcije

(a) Katere od naslednjih funkcij so sode? Katere so lihe? Katere so sode in lihe? Katere niso niti sode niti lihe?

i. $f(x) = 3x^4 + x^2 - 5$

ii. $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

iii. $h(x) = \sin x - \cos x$

iv. $i(x) = \frac{e^x - 1}{e^{-x} + 1}$

(b) Skicirajte grafe funkcij $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $g(x) = \frac{x}{|x|}$ in $h(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Posebej pazite na zveznost teh funkcij!

(c) Za funkcijo $f(x) = \sqrt{1-x}$ določite njeno definicijsko območje in njen odvod.

(d) Določite še zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \sqrt{1-x}$.

4. [20 točk] Nedoločeni in določeni integral

(a) Določite odvod funkcije $\int_a^x g(t) dt$.

(b) Kaj je povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$?

(c) Če je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$, in velja

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

kaj lahko sklepate o funkciji f ?

(d) Določite povprečno vrednost funkcije $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

5. [20 točk] Diferencialne enačbe

(a) Kaj je diferencialna enačba?

(b) Zapišite primer diferencialne enačbe petega reda.

(c) Kaj so rešitve diferencialne enačbe $y' = y^2$?

(d) Zapišite tisto rešitev diferencialne enačbe $y' = y^2$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 1$.