

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: drugi kolokvij

15. januar 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

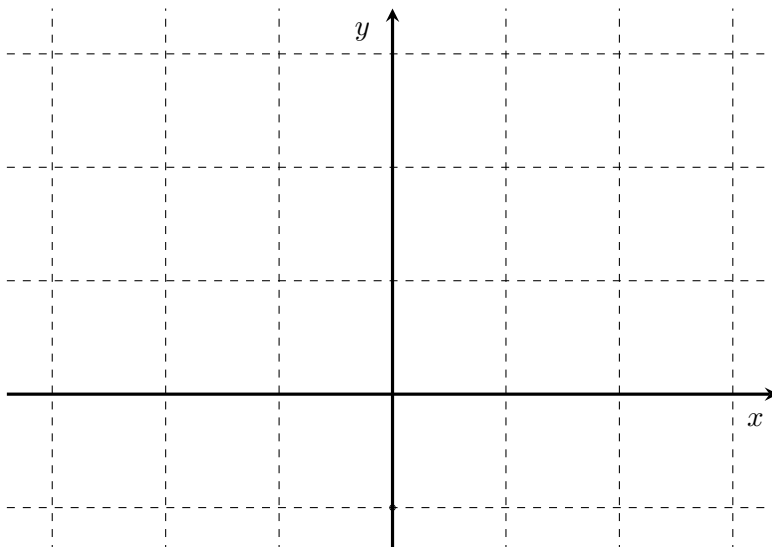
Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s s predpisom $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

a) (6 točk) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) (4 točke) Izračunaj stacionarne točke funkcije f in določi intervale, na katerih funkcija f narašča oziroma pada.

c) (7 točk) Na katerih intervalih je funkcija f konveksna in kje konkavna?

d) (8 točk) Skiciraj graf funkcije f . (Namig: $\frac{1}{e^2} \approx 0.135$, $\frac{1}{e^4} \approx 0.018$.)



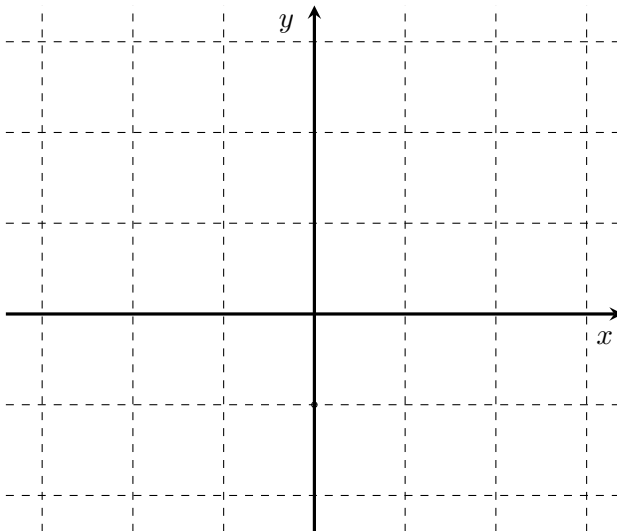
2. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x, y) = -1 + x^2 - 8y + 4y^2$.

a) (5 točk) Izračunaj gradient funkcije f v točki $(2, 1)$.

b) (10 točk) Izračunaj smerni odvod funkcije f v točki $(2, 1)$ v smeri najhitrejšega naraščanja in smerni odvod funkcije f v točki $(2, 1)$ v smeri vektorja $(1, 1)$.

c) (10 točk) Določi enačbo tiste nivojnice funkcije f , ki gre skozi točko $(2, 1)$, in jo skiciraj.

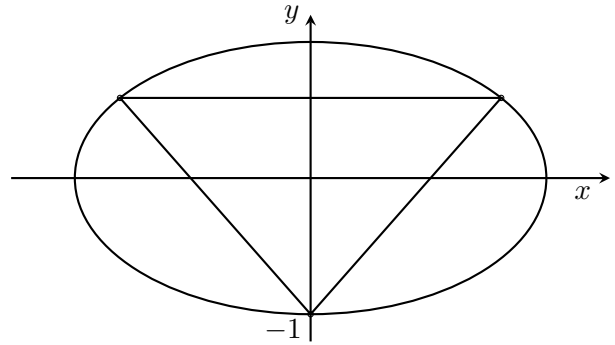


3. naloga (25 točk)

V elipso z enačbo

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

želimo včrtati enakokrak trikotnik z največjo možno ploščino. Pri tem se mora eno oglišče nahajati v točki $(0, -1)$, nasproti ležeča stranica pa mora biti vzporedna x -osi, kot kaže slika.



a) (6 točk) Izrazi ploščino včrtanega trikotnika kot funkcijo koordinat (x, y) desnega zgornjega oglišča trikotnika ($x \geq 0, y \geq 0$).

b) (4 točke) Zapiši Lagrangeovo funkcijo za ustrezeni problem vezanih ekstremov.

c) (15 točk) Reši problem vezanih ekstremov. Koliko je največja možna ploščina tako včrtanega trikotnika?

4. naloga (25 točk)

a) (12 točk) Izračunaj določeni integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{4 - \sin^2(x)} dx$$

b) (13 točk) Naj bo

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{3} - \sqrt{x}$$

Izračunaj dolžino loka grafa funkcije h na intervalu $x \in [1, 4]$.