

Osnove matematične analize: predrok

8. januar 2021

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov (kalkulator, telefon) ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

Vsako nalogo piši na svojo stran. Če ne rešuješ na izpitno polo, se na vsak list zgoraj podpiši, navedi številko naloge ter naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

1	
2	
3	
Σ	

1. naloga (30 točk)

Naj bo zaporedje (a_n) podano z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},$$

z začetnim členom $a_1 = 2$.

a) (20 točk) Grafično predstavi člene danega zaporedja s pomočjo grafa funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$, pri čemer natančno nariši presečišče teh dveh krivulj. Ali je zaporedje omejeno? Ali je monotono? Odgovora dokaži z uporabo indukcije.

b) (10 točk) Ali je dano zaporedje konvergentno? Če je, izračunaj njegovo limto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Na kratko argumentiraj, če se odgovor na zadnje vprašanje kaj spremeni, če je začetni člen a_1 poljubno nenegativno število. Kaj pa, če je $a_1 = -2$? (Namig glede čisto zadnjega vprašanja: izračunaj prvih par členov zaporedja.)

2. naloga (30 točk)

Temperatura v ravnini je podana s funkcijo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T(x, y) = e^{-3x^2 - 3y^2 + 6}.$$

a) (15 točk) Zapiši enačbi nivojnic za nivoja $c = 1$ in $c = e^3$ ter obe nariši v isti koordinatni sistem.

b) (5 točk) Izračunaj temperaturni gradient $(\text{grad}T)(x, y)$.

c) (10 točk) Iz točke $P(1, 1)$ se malo premaknemo v smeri vektorja $(4, -3)$. Bo pri tem temperatura narasla ali padla?

3. naloga (30 točk)

Dani sta funkciji f in g

$$\begin{aligned}f(x) &= x(x - \pi) \\g(x) &= \sin(x)e^{\cos(x)}\end{aligned}$$

a) (8 točk) Izračunaj nedoločeni integral funkcije f .

b) (14 točk) Izračunaj nedoločeni integral funkcije g .

c) (8 točk) Izračunaj ploščino omejena lika, ki ga omejujeta funkciji f in g . Če v rezultatu nastopa recimo e ali π , ga pusti v taki obliki.

Nasvet: Pri določanju mej za ustrezní integral oziroma reševanju enačbe $f(x) = g(x)$ je dovolj pogledati, kje so ničle funkcij f in g .