

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: 1. računski izpit

20. januar 2022

Čas pisanja je 80 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

V kompleksnih številih rešujemo enačbo

$$(z - 2\bar{z} - \sqrt[3]{2})(z^3 - 1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

a) (12 točk) Poišči vse kompleksne rešitve $z \in \mathbb{C}$.

b) (4 točke) Nariši rešitve v kompleksni ravnini.

c) (9 točk) Naj bo w rešitev zgornje enačbe z največjo imaginarno komponento. Poišči $\operatorname{Re}(w^9)$ in $\operatorname{Im}(w^9)$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Oglejmo si vrsti

$$V_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2^n}{5^{n+1}} \quad \text{in} \quad V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{5^{n+1}}.$$

a) (10 točk) Ali vrsta V_1 konvergira? Če konvergira, jo seštej.

b) (15 točk) Pri katerih $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta V_2 ? Za te x izrazi vsoto kot funkcijo spremenljivke x .

3. naloga (25 točk)

Mihova mama bo za njegov rojstni dan spekla čokoladno torto v obliki valja. Na voljo že ima 1 liter pripravljene mase, ker pa ji zmanjkuje čokolade za okrasitev, želi poskrbeti, da bo imela torta kar najmanjšo površino.

a) (8 točk) Izrazi volumen torte $V(r, h)$ in površino torte $S(r, h)$ s polmerom r in višino h . Pri tem ne pozabi, da spodnja ploskev torte ne bo okrašena.

b) (13 točk) Pri katerem radiju r bo pri danem volumnu $V = 1$ površina torte najmanjša možna?

c) (4 točke) V kakšnem razmerju sta pri tej najmanjši možni površini radij r in višina h ? Rezultat zapiši v obliki $a : b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{N}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x \arctan(x^2)}{1+x^4}} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

a) (10 točk) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okrog x osi na intervalu $[0, 1]$.

b) (15 točk) Izračunaj ploščino pod grafom funkcije g na intervalu $[3, \infty)$.