

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize:

1. računski izpit

24. januar 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Zaporedje a_n definiramo s predpisom $a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2^n}$.

a) (4 točke) Izračunaj a_n za $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

b) (8 točk) Dokaži, da je $a_{n+1} - a_n < 0$ za $n \geq 5$.

c) (8 točk) Dokaži, da je $a_n > 0$ za $n \geq 3$.

d) (5 točk) Naj bo $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2^x}$. Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Ali obstaja limita zaporedja a_n ? Če obstaja, jo izračunaj.

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$$

a) (4 točke) Določi definicijsko območje in ničle funkcije f . Ali je f injektivna?

b) (8 točk) Določi stacionarne točke funkcije f . Izračunaj vrednosti funkcije f v stacionarnih točkah.

c) (8 točk) Izračunaj še drugi odvod funkcije f . Kakšnega tipa so stacionarne točke iz **b)**? Ali ima funkcija f kakšen prevoj?

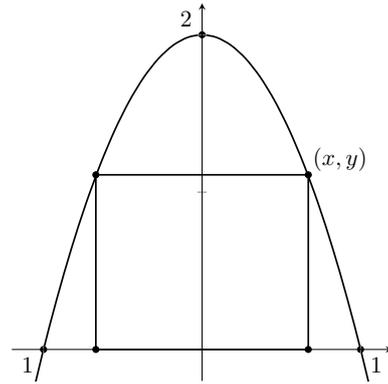
d) (5 točk) Na podlagi ugotovitev iz prejšnjih točk skiciraj funkcijo f .

3. naloga (25 točk)

Pod parabolo z enačbo

$$2x^2 + y = 2$$

želimo včrtati pravokotnik z največjo možno ploščino. Pri tem morajo biti stranice pravokotnika vzporedne koordinatnima osema, ena od njih pa mora ležati na x -osi, kot kaže slika.



a) (6 točk) Izrazi ploščino pravokotnika $S(x, y)$ kot funkcijo koordinat (x, y) desnega zgornjega oglišča ($x \geq 0, y \geq 0$).

b) (4 točke) Zapiši Lagrangeovo funkcijo $s(x, y, \lambda)$ za ustrezeni problem vezanih ekstremov.

c) (15 točk) Koliko je največja možna ploščina tako včrtanega pravokotnika?

4. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Izračunaj ploščino omejenega območja med grafoma funkcij $f(x) = \cos(x)$ in $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$.

b) (15 točk) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo funkcijo

$$h(x) = \sqrt{x}e^{-x}$$

okrog x -osi na območju $x \in [0, \infty]$.