Ime in priimek

Osnove matematične analize: drugi računski izpit

2. februar 2021

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov (kalkulator, telefon) ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!
Vsako nalogo piši na svojo stran. Če ne rešuješ na izpitno polo, se na vsak list zgoraj podpiši, navedi številko naloge ter naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

1. naloga (35 točk)

a) (10 točk) Določi taki kompleksni števili u, v, da bo za vsa kompleksna števila z veljala enačba

$$(z^2 + u)(z^3 + v) = z^5 + 4z^3 + 8iz^2 + 32i$$

Rešitev : Če zmnožimo izraz na levi, dobimo (5 točk)

$$z^5 + uz^3 + vz^2 + uv = z^5 + 4z^3 + 8iz^2 + 32i$$

Enakost mora veljati za vse z in polinoma v z sta enaka, natanko takrat ko so vsi koeficienti enaki, od koder lahko preberemo $u = 4$ in $v = 8i$ (5 točk).

b) (15 točk) Poišči vse rešitve enačbe

$$z^5 + 4z^3 + 8iz^2 + 32i = 0$$

Če ti ni uspelo rešiti **a)** naloge, reši enačbo $z^3 - 8i = 0$ (vendar v tem primeru je naloga vredna samo 10 točk).
Rešitev : Po **a)** je enačba ekvivalentna enačbi

$$(z^2 + 4)(z^3 + 8i) = 0$$

Ločimo dva primera, $z^2 = -4$ ali $z^3 = -8i$. Prvi primer da dve rešitvi

$$z_{1,2} = \pm 2i$$

Rešitve druge enačbe so tretji koreni števila $-8i$. Pomagamo si s polarnim zapisom

$$-8i = 8e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

in vse tri korene lahko izrazimo s formulo

$$z_k = 2e^{\frac{\pi i}{2} + \frac{2\pi i k}{3}}$$

za $k = 0, 1, 2$.

c) (10 točk) Poišči vse rešitve enačbe

$$|z|^3 z^2 + 4|z|^3 - 8iz^2 - 32i = 0$$

Namig: Primerjaj to enačbo z izrazom, ki ga iz **a)** *naloge.*
Rešitev : Če primerjamo z enačbo iz **a)**, opazimo, da velja

$$(z^2 + 4)(|z|^3 - 8i) = |z|^3 z^2 + 4|z|^3 - 8iz^2 - 32 = 0$$

Spet imamo načeloma dva primera, $z^2 - 4 = 0$ ali $|z|^3 - 8i = 0$. Vendar pa je $|z|$ (in s tem tudi $|z|^3$) vedno nenegativno realno število, zato drugi faktor ne more biti nikoli enak 0. Tako ostaneta samo dve rešitve $z_{1,2} = \pm 2i$.

2. naloga (30 točk)

Naj bo zaporedje (a_n) podano z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$$

z začetnim členom $a_1 = \sqrt{3}$.

a) (20 točk) Grafično predstavi člene danega zaporedja s pomočjo grafa funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt{3 + 2x}$, pri čemer natančno nariši presečišče teh dveh krivulj. Ali je zaporedje omejeno? Ali je monotono? Odgovora dokaži z uporabo indukcije.

b) (10 točk) Ali je dano zaporedje konvergentno? Če je, izračunaj njegovo limito $\lim_{n\to\infty} a_n$. Na kratko argumentiraj, če se odgovor na zadnje vprašanje kaj spremeni, če je začetni člen $a_1 = 4$.

3. naloga (35 točk)

Dana je funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x + 2)y - (y - 2)x^2.$$

a) (10 točk) Poišči stacionarne točke funkcije f.

b) (15 točk) Določi enačbo nivojnice skozi stacionarno točko z največjo x-koordinato. Nivojnico tudi nariši.

c) (5 točk) Ali ima nivojnica iz prejšnje točke samopresečišča? Ali je ta stacionarna točka sedlo?

d) (5 točk) Izračunaj Hessejevo matriko preslikave f v tej stacionarni točki.