

Ime in priimek \_\_\_\_\_

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

## Osnove matematične analize: 2. računski izpit

2. februar 2022

Čas pisanja je 80 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

### 1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = \frac{3}{4-x}$$

Definirajmo rekurzivno zaporedje  $a_n$  s pravilom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(a_n) \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

a) (4 točke) Izračunaj  $a_2$ .

b) (6 točk) Za katere vrednosti  $x$  velja  $f(x) \geq x$ ?

c) (10 točk) Dokaži, da je zaporedje  $a_n$  naraščajoče in omejeno navzgor.

d) (5 točk) Kaj je limita zaporedja  $a_n$ ?

**2. naloga (25 točk)**

Naj bo

$$f(x) = \log(x^2 + 2x + 2)$$

a) (5 točk) Določi definicijsko območje funkcije  $f$ . Ali je  $f$  injektivna?

b) (10 točk) Določi ničle funkcije  $f$ , stacionarne točke ter intervale naraščanja in padanja. Kje ima  $f$  minimum?

c) (5 točk) Izračunaj limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\log(x)} \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\log(-x)}$$

d) (5 točk) Na podlagi ugotovitev iz prejšnjih točk skiciraj funkcijo  $f$ .

### 3. naloga (25 točk)

V elipso z enačbo

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

včrtamo pravokotnik, ki ima stranice vzporedne koordinatnim osem (tako da oglišča pravokotnika ležijo na elipsi).

Poiskati želimo včrtan pravokotnik z največjim možnim obsegom.

**a) (5 točk)** Za dano oglišče pravokotnika  $T(x, y)$  v prvem kvadrantu ( $x \geq 0$  in  $y \geq 0$ ) zapiši obseg pravokotnika kot funkcijo  $(x, y)$ .

**b) (5 točk)** Zapiši ustrezno Lagrangeovo funkcijo za ta problem.

**c) (15 točk)** Kakšen je največji možni obseg tako včrtanega pravokotnika?

**4. naloga (25 točk)**

Naj bo

$$f(x) = (x - 1)^{3/2}$$

**a) (13 točk)** Izračunaj dolžino loka krivulje  $y = f(x)$  na intervalu  $x \in [1, 2]$ .

**b) (12 točk)** Ali obstaja kateri od integralov

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx \quad \text{ali} \quad \int_2^\infty \frac{1}{f(x)} dx?$$

Če obstaja, ga izračunaj.