

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Izpit iz Osnov matematične analize 8. september 2015

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [20 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.

(b) Zapišite pravilo za množenje kompleksnih števil v polarni obliki.

(c) V kompleksni ravnini narišite števili $z = 1 + i$ in $w = \frac{1}{2}(1 - i)$ in ju zapišite v polarni obliki.

(d) Izračunajte $z^5 w^3$ in ga narišite v kompleksni ravnini v točki (c).

2. [20 točk] Zaporedja in vrste

(a) Število L je limita zaporedja (a_n) , če _____
_____.

(b) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna, če _____
_____.

(c) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, ali potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$? Utemeljite ali
zapišite protiprimer.

(d) Za katere vrednosti q je geometrijska vrsta s kvocientom q konvergentna in kolikšna
je v tem primeru vsota?

3. [20 točk] Funkcije

(a) Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna v točki a , če velja _____
_____.

(b) Za funkciji $f(x) = \sqrt{1-x}$ in $g(x, y) = \sqrt{1-x-y}$ določite njuni definicijski območji.

(c) Narišite nekaj nivojskih krivulj funkcije g .

(d) Za zvezno funkcijo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj velja

$$h(0) = h(1) = 1, \quad h(-2) = h(-1) = h(3) = -1, \quad h(2) = 2.$$

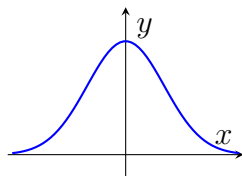
Kolikšno je najmanjše število ničel take funkcije?

4. [20 točk] Odvodi

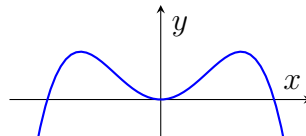
(a) Zapišite definicijo odvoda funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v točki x_0 .

(b) Kako izračunamo približek funkcije f v točki $x_0 + h$ z diferencialom?

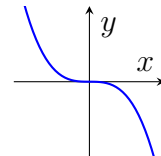
(c) Za funkcije $g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ imamo podane njihove grafe na intervalu $[-3, 3]$.



graf g



graf h



graf k

Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f'(-1) = -f'(1)$ in $f''(x) < 0$, za vse $x > 2$. Katera izmed funkcij g, h, k je lahko funkcija f ?

(d) Narišite graf poljubne funkcije φ , ki zadošča pogojem: $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(1) = \varphi'(2) = 0$, $\varphi''(-1) = 0$ in $\varphi''(-3) \geq 0$. Omenjeni pogoji morajo biti na grafu dobro razvidni.

5. [20 točk] Integral

(a) Določeni integral pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je _____

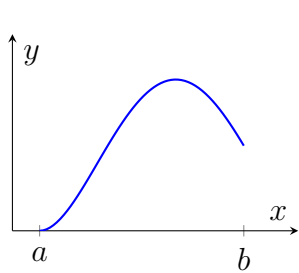
_____.

(b) Če je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$, in velja

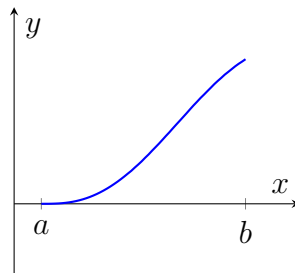
$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

kaj lahko sklepate o funkciji f ?

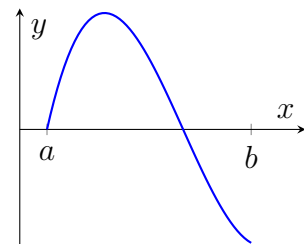
Za $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definirajmo funkcijo $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Poleg tega so podani tudi naslednji grafi nekih funkcij.



graf X



graf A



graf B

(c) Zapišite odvod funkcije g .

(d) Če je graf X graf funkcije f , kateri izmed grafov A ali B je graf funkcije g ?

Če je graf X graf funkcije g , kateri izmed grafov A ali B je graf funkcije f ?