Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

Izpit iz Osnov matematične analize
26. januar 2017

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

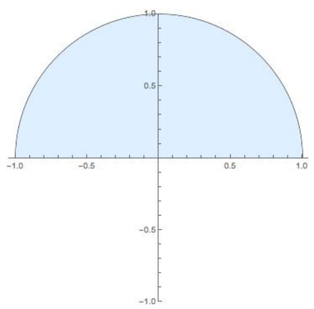
1. **[20 točk] Kompleksna števila**

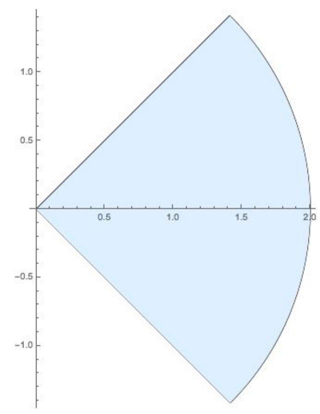
   (a) Zapišite realni in imaginarni del števil $z_1 = e^{i\pi}$ in $z_2 = 2e^{-i\pi/4}$.

   Rešitev:
   $z_1 = e^{i\pi} = cos\pi + i\sin\pi = -1$ torej $\mathrm{Re}(z_1) = -1$, $\mathrm{Im}(z_1) = 0$
   $z_2 = 2e^{-i\pi/4} = \cos\pi/4 - i\sin\pi/4 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ torej $\mathrm{Re}(z_2) = \sqrt{2}$, $\mathrm{Im}(z_2) = -\sqrt{2}$

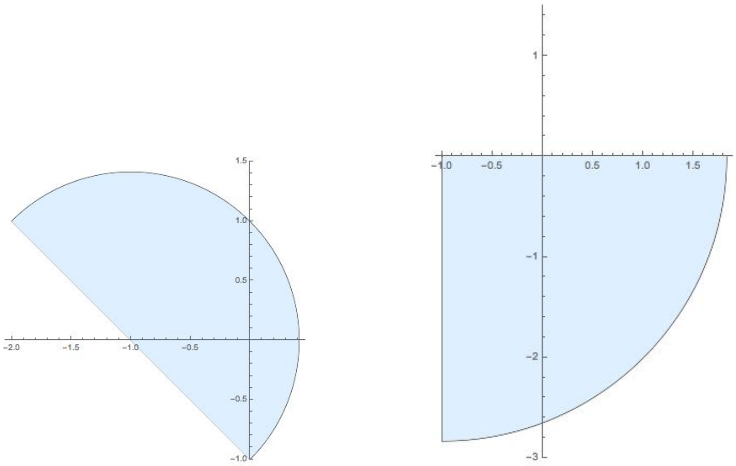
   (b) Narišite množici $A = \{z = |z|e^{i\varphi}\ ;\ \varphi \in [0,\pi], |z| \leq 1\}$ in $B = \{z = |z|e^{i\varphi}\ ;\ \varphi \in [-\pi/4, \pi/4], |z| \leq 2\}$ v kompleksni ravnini.

   Rešitev:



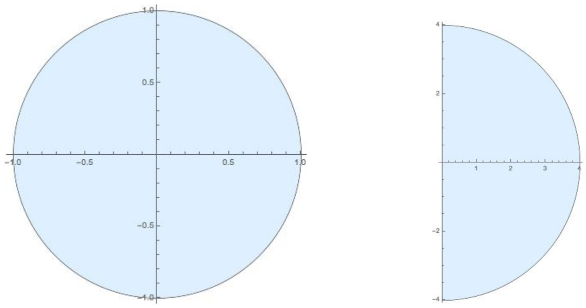


   (c) Narišite sliki množic A in B s preslikavo $z \mapsto -1 + z(1-i)$.
   Rešitev: ker je $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi}$, je preslikava je sestavljena iz raztega za faktor $\sqrt{2}$, zasuka za kot $-\pi/4$ in premika za 1 v levo



(d) Narišite še sliki množic A in B s preslikavo $z \mapsto z^2$.

Rešitev: preslikava $z = |z|e^{i\varphi} \mapsto z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi}$ *raztegne kot v kompleksni ravnini z vrhom v* 0 *za faktor 2*



2. **[15 točk] Zaporedja in vrste**

(a) **[6 točk]** Delna vsota vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *vsota prvih nekaj členov vrste*: $S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$.

Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentna, če *konvergentno zaporedje njenih delnih vsot*

Vsota vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *limita zaporedja njenih delnih vsot* $S = \lim_{m\to\infty} S_m$.

(b) **[9 točk]** Za vsako vrsto napišite ali je konvergentna in, če je, koliko je njena vsota:

$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}$ *geometrijska vrsta s kvocientom* $1/\pi < 1$ *je konvergentna,* $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{\pi}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *harmonična vrsta ni konvergentna*

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ *geometrijska vrsta s kvocientom* $3/2 > 1$ *ni konvergentna*

3. **[15 točk] Funkcije**

(a) **[7 točk]** Število L je limita funkcije $f(x)$ v točki x_0, če *za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $\delta > 0$*, da je* $|f(x) - L| < \varepsilon$*, če je* $|x - x_0| < \delta$.

(b) **[8 točk]** Za vsako funkcijo določite, ali ima v točki 0 limito. Če limita obstaja, jo zapišite, če ne, napišite razlog.

$f(x) = |x|$: *funkcija je zvezna v točki 0, limita je 0*

$f(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{x}$: $\quad \lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$: $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \infty$, *limita ne obstaja*

$f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$: $\quad \lim\limits_{x\nearrow 0} \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\quad \lim\limits_{x\searrow 0} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ *leva limita je različna od desne, zato limita ne obstaja*

4. **[20 točk] Odvod**

(a) Zapišite definicijo odvoda funkcije $f(x)$ v točki x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(b) Zapišite odvod funkcije $f(x) = \log(1 + x - 2x^2)$: $f'(x) = \dfrac{1-4x}{1+x-2x^2}$

(c) Ali bo funkcijska vrednost padla ali narasla, če se v točki $x_0 = 0$ vrednost x malo poveča?
Ker je $f'(0) = 1 > 0$, bo funkcijska vrednost narasla.

(d) Zapišite linearno aproksimacijo za funkcijo $f(x) = \log(1 + x - 2x^2)$ v točki x_0.

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 + 1 \cdot x = x$$

(3) S pomočjo linearne aproksimacije ocenite vrednost $f(0.01)$.

$$f(0.01) \approx 0.01$$

5. **[20 točk] Ekstremi**

(a) Potreben pogoj za lokalni ekstrem parcialno odvedljive funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) je: (x_0, y_0) *je stacionarna točka funkcije, tj.* $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = 0$.

Zadosten pogoj za lokalni ekstrem parcialno odvedljive funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) je: *Determinanta matrike drugih parcialnih odvodov je pozitivna v točki (x_0, y_0), tj.* $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$

(b) Poiščite vse lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ in določite njihov tip (max ali min).

Poiščemo stacionarne točke:
$f_x(x, y) = 2x - 2 = 0$ *in* $f_y(x, y) = 2y - 3 = 0$,

edina stacionarna točka je $(1, 3)$.

Preverimo, ali je v $(1, 3)$ *ekstrem:*

$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 0$, *torej je determinanta matrike drugih parcialnih odvodov enaka* $4 - 0 = 4 > 0$ *in v točki* $(1, 3)$ *je lokalni ekstrem.*

Ker je $f_{xx} = 2 < 0$, *je ta ekstrem minimum.*

6. **[20 točk] Integral**

   Za funkcijo $F(x) = \displaystyle\int_0^x (1 + t)e^{-t}\, dt$

   (a) zapišite njen odvod: $F'(x) = (1 + x)e^{-x}$.

   (b) določite območja padanja in naraščanja in lokalne ekstreme:

   Območje padanja: $F'(x) < 0$ *tj.* $x \in (-\infty, -1)$
   Območje naraščanja: $F'(x) > 0$ *tj.* $x \in (-1, \infty)$
   Lokalni ekstrem: $x = -1$, *je minimum, ker odvod predznak spremeni z* $-$ *na* $+$.

   (c) poiščite $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$, če obstaja,

   Integral $\int_0^x (1 + t)e^{-t}\, dt$ *izračunamo z integriranjem po delih:*

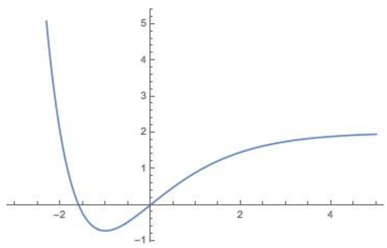
   $u = (1 + t), dv = e^{-t}dt; du = dt, v = -e^{-t}$

   $F(x) = -(1 + t)e^{-t} \mid_0^x - \int_0^x -e^{-t}\, dt = -(1 + x)e^{-x} + 1 - e^{-x} + 1 = 2 - (2 + x)e^{-x}$

   Limito pa izračunamo s pomočjo l'Hospitalovega pravila (ali pa se spomnimo, da eksponentna funkcija narašča bistveno hitreje kot polinom):

   $$\lim x \to \infty F(x) = 2 - \lim_{x\to\infty} (2 + x)e^{-x} = 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{2 + x}{e^x} = 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 2$$

   (d) približno skicirajte njen graf.



   O funkciji $F(x)$ *vemo to, da je* $F(0) = 0$, *da ima pri* $x = -1$ *minimum, da gre vrednost* $F(x)$ *proti* ∞, *ko gre* $x \to -\infty$, *in (če smo rešili točko (c)) da ima limito* 2, *ko gre* $x \to \infty$.