

## Izpit iz Osnov matematične analize

### 23. avgust 2018

- Čas pisanja: **45 minut**. Vsi deli nalog so enakovredni.
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

#### 1. [20 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila  $z = x + iy$ ? Narišite sliko in napišite, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.

(b) Zapišite pravilo za množenje in deljenje kompleksnih števil v polarni obliki.

(c) V kompleksni ravnini skicirajte območje

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \leq 0, |z| \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

in območje  $\mathcal{E}$  v katerega se  $\mathcal{D}$  preslika s preslikavo  $z \mapsto \frac{i}{2} \bar{z}$ .

2. [20 točk] Zaporedja in vrste

- (a) Kdaj je zaporedje naraščajoče? Zapišite primer zaporedja  $(a_n)_n$ , ki je naraščajoče, in primer zaporedja  $(b_n)_n$ , ki ni naraščajoče.
- (b) V katerem primeru je naraščajoče zaporedje konvergentno?
- (c) Ali je vsako konvergentno zaporedje omejeno? Utemeljite ali zapišite protiprimer.
- (d) Ali je vsako omejeno zaporedje konvergentno? Utemeljite ali zapišite protiprimer.

3. [20 točk] Odvod in integral

- (a) Kdaj pravimo, da je točka  $a$  stacionarna točka funkcije  $f(x)$ ?
- (b) Poiščite vse stacionarne točke funkcije  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ .
- (c) Poiščite še stacionarne točke funkcije  $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2+1} dt$ . (Funkcije  $F(x)$  ni treba izračunati.)

4. [20 točk] Funkcije več spremenljivk

(a) Definirajte parcialni odvod funkcije  $f = f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  po spremenljivki  $x$ .

(b) Definirajte smerni odvod funkcije  $f = f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  v smeri enotskega vektorja  $e = (e_1, e_2)$ .

(c) Denimo, da je  $f(1, 2) = 3$ ,  $f_x(1, 2) = 4$  in  $f_y(1, 2) = -5$ .

i. Približno koliko je  $f(1.1, 2.2)$ ?

ii. Ali se bo funkcijska vrednost povečala ali pomanjšala, če se iz točke  $(1, 2)$  malo pomaknemo v smeri vektorja  $(1, 1)$ ? Zakaj?

iii. V kateri smeri se bo funkcijska vrednost ob pomiku iz točke  $(1, 2)$  najbolj zmanjšala?

5. [20 točk] Integral

(a) Kaj je določeni integral pozitivne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  na intervalu  $[a, b]$ ?

(b) Natančno zapišite Newton-Leibnizovo formulo.

(c) Izračunajte  $\int_{-2}^2 |x - 1| dx$  in narišite skico!