

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

3. izpit iz OME 29. avgust 2024

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, morebitni pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi in podpisani. Vsi deli nalog so enakovredni. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [**15 točk**] **Kompleksna števila** Dani sta kompleksni števili $z = 1 - i$ in $w = 8i$.

(a) Zapiši števili z in w v polarni obliki.

(b) Določi najmanjše število $n \in \mathbb{N}$, za katerega je z^n/w realno število.

(c) Skiciraj množico $\mathcal{D} = \{v \in \mathbb{C} : |v - z| = \sqrt[3]{|w|}\}$ v kompleksni ravnini.

2. [15 točk] Zaporedja in vrste

(a) Naj bo zaporedje a_n omejeno. Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna? Dokaži ali poišči protiprimer.

(b+c) Za vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$ določi n -to delno vsoto s_n in izračunaj vsoto vrste.

3. [20 točk] Funkcije

(a) Naj bo funkcija ene spremenljivke zvezna na intervalu $[a, b)$. Ali je na tem intervalu omejena? Dokaži ali poišči protiprimer.

(b) Zapiši definicijo limite $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$.

(c+d) Skiciraj množico točk (x, y) v ravnini, v katerih funkcija $f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ zavzame vrednost 1.

4. [25 točk] Odvod

(a) Zapiši definicijo parcialnega odvoda funkcije $f(x, y)$ po spremenljivki y v točki (a, b) .

(b+c) Za funkcijo $f(x, y) = x^2y$ poišči vsaj en neničeln vektor v ravnini, ki je pravokoten na gradient funkcije f v točki $(1, 3)$.

(d+e) Za funkcijo $f(x, y) = x^2y$ s pomočjo linearne aproksimacije približno izračunaj $f(0.98, 3.01)$.

5. [25 točk] Integral in diferencialne enačbe

(a+b) Izračunaj $\iint_{\mathcal{D}} xy \, dx dy$, kjer je $\mathcal{D} = [0, 1] \times [-1, 2]$.

(c+d) Ali integral $\int_0^2 x^{-1/2} \cos x \, dx$ obstaja? Utemelji.

(e) Katera diferencialna enačba opisuje zakon naravne rasti? Odgovor utemelji.

(1) $y' - y = 0$

(2) $y' = xy$

(3) $y' = y(1 - y)$