

Diskretne strukture UNI: 2. kolokvij

14. januar 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba enega A4 lista s formulami in kalkulatorja. Uporaba elektronskih pripomočkov za komunikacijo s kolegi ni dovoljena.

Vsako nalogo piši na svojo stran. Na vsak list se zgoraj podpiši in navedi številko naloge. Naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Funkcija $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je za $n = 0, 1$ dana z $f(0) = 0$ ter $f(1) = 1$. Za $n \geq 2$ pa $f(n)$ opišemo tako: Naj bo $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \cdots p_s^{k_s}$ praštevilski razcep števila n , kjer je $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. Tedaj predpišemo

$$f(n) = 2^{k_1} 3^{k_2} 5^{k_3} \cdots q_s^{k_s},$$

kjer je q_s s -to praštevilo v naraščajočem zaporedju praštevil $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$

Npr.: $f(3^2 \cdot 7^3) = 2^2 \cdot 3^3$, $f(7 \cdot 17^2 \cdot 29) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

- (a) Izračunaj $f(301)$, $f(302)$, $f(303)$ in $f(304)$.
- (b) Utemelji, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $n \geq f(n)$. Za katere n velja $n = f(n)$?
- (c) Ali za vse $m, n \in \mathbb{N}$ iz $m \leq n$ sledi $f(m) \leq f(n)$?
- (d) Ali je f injektivna? Ali je f surjektivna?
2. (a) Koliko je naravnih števil med 1 in 1000, ki so deljiva z 12, 26 ali 45?
- (b) Koliko je naravnih števil med 1 in 1000, ki so deljiva z 10, niso pa deljiva z nobenim od 12, 26 oziroma 45?
3. Gospe Majster so v trgovini Samakrama odobrili vrnitev kupnine. Zmedeni blagajnik ji je namesto zneska v evrih vrnil znesek v centih, namesto zneska v centih pa znesek v evrih. Gospa Majster tega ni opazila, denar je pospravila v žep in odšla. Ko pa je že plačala 50 centov za parkirnino, je opazila, da ima zdaj v žepu dvakrat toliko denarja, kot naj bi dobila vračila.
- (a) Označimo z x znesek kupnine v evrih, z y pa znesek kupnine v centih. Zapiši linearno diofantsko enačbo za x ter y in poišči njeno splošno rešitev.
- (b) Poišči vse rešitve (x, y) te enačbe, za katere je $x \geq 0$ in $y \geq 0$.
- (c) Kolikšen je znesek vračila, ki bi ga morala dobiti gospa Majster?

4. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zapiši α in β kot produkta disjunktne ciklov.
- (b) Kolikšen je lahko red permutacije π , ki reši enačbo

$$\alpha * \pi^3 * \alpha^{-1} = \beta * \alpha?$$

- (c) Poišči eno rešitev π enačbe zgoraj, ki ima najvišji možen red.