Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Diskretne strukture UNI: 2. kolokvij

10. januar 2024

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci ter enostavnega kalkulatorja. Uporaba ostalih elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil, $\mathbb{P}$ pa množica praštevil. Na množici $\mathbb{N}$ definiramo relacijo R z opisom

$$aRb \text{ natanko tedaj, ko obstajata } p, q \in \mathbb{P}, \text{ da je } ap = bq.$$

(Tako je npr. $6R10$, vendar $\neg(2R8)$.)

a) (15 točk) Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna? Je R ekvivalenčna relacija? *Zakaj oz. zakaj ne?*

b) (10 točk) Ali je tranzitivna ovojnica relacije R, relacija R^+, ekvivalenčna? Opiši ekvivalenčni razred števila 5 relacije R^+, tj. $[5]_{R^+}$. *Natančno utemelji!*

2. naloga (25 točk)

Naj bo n naravno število.

a) (5 točk) Koliko je naravnih števil med 1 in $30n$, ki so deljiva z 2, 3 in 5?

b) (10 točk) Koliko je naravnih števil med 1 in $30n$, ki so deljiva z vsaj enim od števil 2, 3 in 5?

c) (10 točk) Koliko je naravnih števil med 1 in $30n$, ki so deljiva z natanko dvema od 2, 3 in 5?

3. naloga (25 točk)

Za naravno število n opazujemo linearno diofantsko enačbo

$$7x + 3y = n.$$

a) (5 točk) Poišči splošne rešitve te linearne diofantske enačbe za $n = 4, 8, 11$.

b) (10 točk) Utemelji, da je ta linearna diofantska enačba rešljiva za vsa naravna števila n. S formulo za (x, y) opiši splošno rešitev enačbe $7x + 3y = n$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$.

c) (10 točk) Naj bo p_n število nenegativnih rešitev $7x+3y = n$, tj. število rešitev (x, y), za katere je $x \geq 0$ in $y \geq 0$. Utemelji, da je $p_n \geq \frac{n}{48} - 1$.

4. naloga (25 točk)

Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 2 & 10 & 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 5 & 1 & 8 & 9 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

a) (5 točk) Zapiši permutaciji α in β kot produkta disjunktnih ciklov.

b) (10 točk) Določi *tri* dopustne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha * \pi^{11} * \alpha^{-1} = \alpha * \pi * \beta.$$

c) (10 točk) Poišči eno *sodo* permutacijo π ter eno *liho* permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha * \pi^{11} * \alpha^{-1} = \alpha * \pi * \beta.$$