

Diskretne strukture UNI: 3. računski izpit

1. september 2025

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci ter enostavnega kalkulatorja. Uporaba ostalih elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na ucilnica.fri.uni-lj.si. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani so izjavni izrazi

$$A_1 = p \Rightarrow t \vee r, \quad A_2 = q \Rightarrow t \vee s, \quad X = r \Rightarrow \neg s, \quad Y = \neg s \Rightarrow r \quad \text{ter} \quad B = p \wedge q \Rightarrow t.$$

Opazujemo sklepa

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, X \models B \\ \text{in} \quad A_1, A_2, Y \models B. \end{array}$$

a) Ali je sklep $A_1, A_2, X \models B$ pravilen? Če je pravilen, zapiši dokaz, če ni pravilen, poišči protiprimer.

b) Ali je sklep $A_1, A_2, Y \models B$ pravilen? Če je pravilen, zapiši dokaz, če ni pravilen, poišči protiprimer.

2. naloga (25 točk)

Na množici parov (strogo) pozitivnih naravnih števil definiramo relacijo R takole:

$$(a, b)R(c, d) \text{ natanko tedaj, ko } a^b \text{ deli } c^d.$$

a) (10 točk) Pokaži, da je relacija R refleksivna in tranzitivna.

b) (10 točk) Ali je R antisimetrična? Ali je R sovisna? Zakaj oz. zakaj ne?

c) (5 točk) Ali je relacija R delna urejenost?

3. naloga (25 točk)

Dana je permutacija $\alpha = (1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 7)(3 \ 6 \ 8) \in S_8$, kjer je S_8 množica permutacij na 8 elementih. Preslikava $f: \mathbb{N} \rightarrow S_8$ slika naravna števila v zaporedne potence permutacije α , tj.

$$f(0) = \alpha^0 = \text{id}, f(1) = \alpha^1 = \alpha, f(2) = \alpha^2, \dots, f(n) = \alpha^n, \dots$$

a) (5 točk) Izračunaj $f(1)$, $f(3)$ in $f(5)$. Dobljene permutacije zapiši kot produkte disjunktne ciklov.

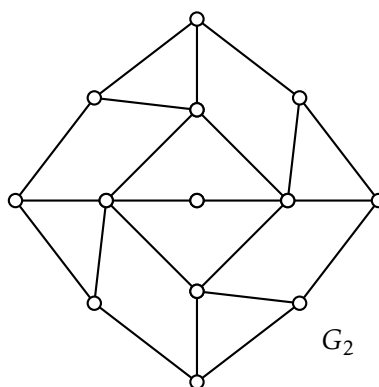
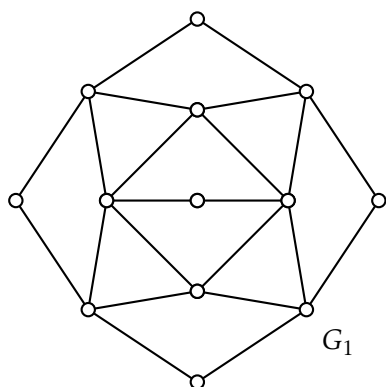
b) (5 točk) Ali je f injektivna? Natančno utemelji!

c) (10 točk) Kolikšni so redi permutacij α^n za $n = 1, 2, \dots, 15$? Kolikšne so parnosti permutacij α^n za $n = 1, 2, \dots, 15$?

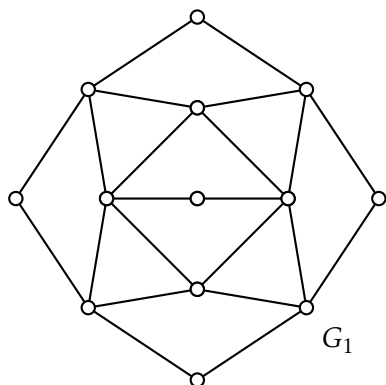
d) (5 točk) Ali je f surjektivna? Natančno utemelji!

4. naloga (25 točk)

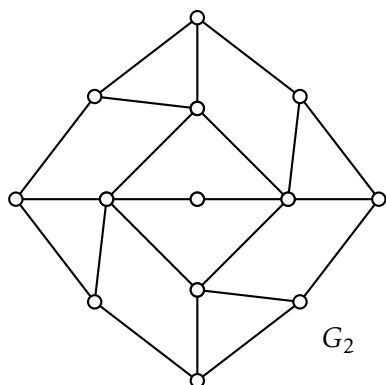
a) (10 točk) Določi kromatični števili grafov G_1 in G_2 . *Odgovor natančno utemelji!*



b) (5 točk) Ali je graf G_1 Hamiltonov? *Odgovor natančno utemelji!*



c) (5 točk) Ali je graf G_2 Hamiltonov? *Odgovor natančno utemelji!*



d) (5 točk) Ali sta grafa G_1 in G_2 izomorfna? *Odgovor natančno utemelji!*

