BROOKSOV IZREK

Točke grafa $G = (V, E)$ želimo obarvati tako, da bosta vsaki sosedni točki obarvani z različnima barvama. Če imamo na voljo premajhno število barv, nam to morda ne bo uspelo (denimo, da imamo na voljo eno samo barvo, graf G pa ima povezave), z zadosti velikim številom barv barvanje vedno uspe (če imamo na voljo $|V(G)|$ barv, lahko točke obarvamo s samimi različnimi barvami).

Kromatično število grafa G, $\chi(G)$, je najmanše zadostno število barv, ki jih potrebujemo za barvanje točk grafa G.

Računanje kromatičnega števila grafa je računsko težaven[1] problem. Optimizacijski problem, poišči barvanje z najmanjšim možnim številom barv je kvečjemu še bolj zahtevna naloga. Na tem mestu bomo želeli kar najbolje oceniti kromatično število grafa, poiskati bomo želeli kar se da tesni zgornjo in spodnjo mejo za kromatično število $\chi(G)$.

Na tem mestu omenimo, da se lahko pri barvanju grafov *vedno* omejimo na povezane grafe. Če namreč graf G ni povezan, potem lahko točke grafa G obarvamo z zaporednim barvanje točk po vseh komponentah grafa G. Ravno tako je razlog za morebitno veliko kromatično število grafa G skrit v kateri izmed komponent, vsaj ena komponenta ora imeti veliko kromatično število. V nadaljevanju privzamemo, da so vsi grafi pod drobnogledom povezani.

Z $\omega(G)$ označimo *velikost največje klike (velikost največjega polnega podgrafa)* v grafu G. Torej $\omega(G)$ označuje velikost največje množice točk S grafa G, v kateri sta vsaki dve točki tudi sosedi. Vsekakor za barvanje točk grafa G potrebujemo vsaj toliko barv kot za barvanje točk iz S. Odtod spodnja meja za kromatično število.

Trditev 1 *V vsakem grafu je* $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Požrešno barvanje

Z $\Delta(G)$ označimo maksimalno stopnjo točke grafa G, z $\delta(G)$ pa minimalno stopnjo točke iz grafa G. Maksimalna stopnja $\Delta(G)$ bo tesno povezana z zgornjo mejo za velikost kromatičnega števila grafa G.

Točke grafa uredimo v zaporedje

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n \tag{1}$$

in jih zaporedoma barvamo v skladu z naslednjim postopkom (pri tem predpostavimo, da so točke z majhnimi indeksi obarvane z barvami $c(v_1), c(v_2), \ldots, c(v_{i-1})$, preostale točke pa še niso obarvane):

> točko v_i obarvamo z najmanjšo *prosto* barvo $c(v_i)$, pri čemer so proste barve tiste, ki niso uporabljene na kateri od obarvanih sosed točke v_i.

Požrešno barvanje je termin, ki ga v literaturi uporabljamo za zgoraj opisan postopek. Število uporabljenih barv je seveda odvisno od vrstnega reda točk (1), nikakor pa število uporabljenih barv ne presega $\Delta(G) + 1$.

Trditev 2 *V vsakem grafu je* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Dovolj je pokazati, da požrešno barvanje uporabi največ $\Delta(G) + 1$ različnih barv.

Požrešno barvanje za barvo točke v_i, $c(v_i)$, izbere najmanjšo prosto barvo. Število na obarvanih sosedah točke v_i uporabljenih barv je vsekakor manjše od števila obarvanih sosed točke v_i. Število

[1] NP-težak, a o teoriji računske zahtevnost na tem mestu ne bi.

obarvanih sosed točke v_i je največ število vseh sosed točke v_i oziroma $\deg(v_i)$. Stopnja točke $\deg(v_i)$ je navzgor omejena z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$. To pomeni, da obarvane sosede točke v_i ne uporabijo vsaj ene izmed barv $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ in dokaz je zaključen. $\square$

Število uporabljenih barv v požrešnem barvanju se lahko znatno razlikuje od kromatičnega števila grafa. Morda najbolj znan primer je graf $G^* = K_{n,n} - M$, poln uravnotežen dvodelni graf, ki mu odstranimo popolno prirejanje povezav: $V(G^*) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, točki u_i in v_j sta sosedi natanko tedaj, ko je $i \neq j$. Če požrešno obarvamo točke grafa G^* vzdolž zaporedja točk

$$v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_n, u_n$$

bo število uporabljenih barv enako n, medtem ko je $\chi(G^*) = 2$.

Zakaj takšna razlika? Zelo verjetno smo si *zaporedje* točk zelo nesrečno izbrali. Najbrž bi s premišljeno izbiro zaporedja točk lahko dosegli precej manjšo potrebo po različnih barvah. Smiselno je zahtevati, da točke majhne stopnje v grafu obarvamo šele na koncu, točke velikih stopenj pa na začetku — takrat bodo imele majhno število obarvanih sosed.

Najenostavnejša uporaba te paradigme se skriva v naslednji trditvi.

Trditev 3 *Naj bo G povezan graf, v katerem obstaja točka v* majhne *stopnje* $\deg(v) < \Delta(G)$*. Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Trdimo, da v grafu G velja naslednja lastnost. Naj bo H poljuben podgraf grafa G. Potem H vsebuje točke *majhne* stopnje $< \Delta(G)$.

Opazko je dovolj preveriti na induciranih podgrafih grafa G. Celoten graf G vsebuje točko majhne stopnje zaradi predpostavke trditve. Naj bo $U \neq \emptyset$ prava podmnožica točk grafa G. Ker je G povezan, obstaja vsaj ena povezava z enim krajiščem v U in drugim krajiščem v $V(G) \setminus U$. Odtod sledi, da ima vsaj ena točka $u \in U$ v induciranem podgrafu $G[U]$ strogo manjšo stopnjo kot v grafu G, $\deg_{G[U]}(u) < \deg_G(u) \leq \Delta(G)$, in opazka je dokazana.

Trditev pripeljemo do konca z uporabo pošrešnega barvanja, pri katerem točko majhne stopnje obarvamo na koncu, preostanek grafa pa poprej rekurzivno. $\square$

Naj bo G povezan graf. Točka v je *prerezna točka* ali 1-*separator*, če graf $G - v$ ni povezan. Analogno paru točk $\{u, v\}$ pravimo *2-separator*, če graf $G - u - v$ ni povezan.

Trditev 4 *Naj bo G povezan graf, ki ima prerezno točko v. Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Naj bo par G_1, G_2 ustrezna separacija grafa G — za grafa G_1 in G_2 velja, da je $G_1 \cup G_2 = G$ in $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$. Pri tem pa nobeden od G_1, G_2 ni enak G. Ker je G povezan, ima točka v soseda tako v G_1 kot v G_2. To pomeni, da je $\deg_{G_1}(v) < \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ in tudi $\deg_{G_2}(v) < \deg_G(v) \leq \Delta(G)$. Po Trditvi 3 obstajata barvanji c_1, c_2 grafov G_1 in G_2 z največ $\Delta(G)$ barvami. Z morebitnim preimenovanjem barv (permutacijo) lahko dosežemo, da se barvanji c_1 in c_2 ujemata v točki v. Unija barvanj c_1 in c_2 je potem barvanje grafa G z največ $\Delta(G)$ barvami. $\square$

Brooksov izrek

Na tem mestu se lotimo glavnega rezultata v tem razdelku, Brooksovega izreka.

Izrek 5 (Brooks) *Naj bo G povezan graf. Če G ni niti poln graf niti cikel lihe dolžine, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Naj bo G povezan graf in označimo $\Delta = \Delta(G)$. Če je $\Delta = 1$, potem je G izomorfen polnemu grafu na dveh točkah. Po Trditvah 3 in 4 lahko predpostavimo, da je G Δ-regularen graf brez prerezne točke.

Če je $\Delta = 2$, potem je G cikel, in je njegovo kromatično število enako $\Delta(G) + 1 = 3$ natanko tedaj, ko je G cikel lihe dolžine. Zato v nadaljevanju privzamemo, da je $\Delta \geq 3$ in da G ni poln graf.

Denimo, da v grafu G obstaja 2-separator $\{x, y\}$. Podobno kot v dokazu Trditve 4 z G_1, G_2 označimo grafa, za katera velja $G_1 \cup G_2 = G$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$, pri čemer niti G_1 niti G_2 nista enaka G. Ker G nima prereznih točk, imata obe točki separatorja x in y sosedi tako v G_1 kot v G_2. Zato je $\deg_{G_1}(x) < \deg_G(x) \leq \Delta$ in po Trditvi 3 obstaja Δ-barvanje grafa G_1, analogno je z grafom G_2.

Toda barvanj grafov G_1 in G_2 v splošnem ne moremo sestaviti v Δ-barvanje grafa G (tudi s permutacijo barv v enem od barvanj), saj morda eno izmed barvanj želi obarvati točki x in y z *isto* barvo, drugo pa zahteva, da sta x in y obarvani z različnima barvama. Treba bo biti malenkost bolj pazljiv.

Če sta točki x in y sosedi v grafu G ni težav. Povezava xy sme biti prisotna tako v G_1 kot v G_2, obe Δ-barvanji grafov G_1 in G_2 obarvata točki x in y z različnima barvama. S permutacijo barv lahko barvanji sestavimo v barvanje celotnega grafa G.

Torej privzamemo, da točki 2-separatorja x in y nista sosedi. Dodajmo povezavo xy v grafa G_1 in G_2, dobljena grafa označimo z G_1^+ in G_2^+. Za stopnjo točke x v obeh grafih velja ocena $\deg_{G_1^+}(x) \leq \Delta$ in $\deg_{G_2^+}(x) \leq \Delta$, ista ocena velja tudi za stopnjo točke y. Toda $\deg_{G_1^+}(x) = \Delta$ implicira, da ima točka x enega samega soseda x' v grafu G_2. Podobno, če je $\deg_{G_2^+}(y) = \Delta$, ima točka y enega samega soseda y' v grafu G_1. Zdaj pa opazujemo separatorje $\{x, y\}$, $\{x, y'\}$, $\{x', y\}$ in $\{x', y'\}$ (le tiste, kjer so ustrezne točke tudi definirane). Za vsaj enega od separatorjev velja, da tudi če dodamo povezavo med točkama separatorja, oba ustrezna dela separacije vsebujeta kakšno točko stopnje $< \Delta$. Po Trditvi 3 ju lahko obarvamo z Δ barvami, barvanji pa s permutacijo sestavimo v Δ-barvanje celotnega grafa G.

Slednjič privzamemo, da G ne vsebuje nobenega 2-separatorja. Naj bo u_0 točka stopnje Δ v grafu G. Ker G ni poln, vsaj dve izmed sosed točke u_0, imenujmo ju v_1 in v_2, nista sosedi. Vemo tudi, da je $G_0 = G - v_1 - v_2$ povezan graf. Zdja se lotimo barvanja, točki v_1 in v_2 obarvajmo z isto barvo 1. Preostale točke grafa G uredimo po padajoči oddaljenosti v grafu G_0 od točke u_0 in jih barvamo požrešno. Katero barvo izberemo za točko $u \neq u_0$? Vsaj ena od sosed točke u je še neobarvana, denimo tista, ki leži bližje u_0 vzdolž najkrajše $u - u_0$ poti. Torej obarvane sosede točke u uporabijo največ $\Delta - 1$ barv. Na koncu obarvamo točko u_0. Ker sta dve njeni sosedi, v_1 in v_2 obarvani z isto barvo, je vsaj ena izmed Δ barv prost tudi za u_0. $\square$