· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Predrok iz DS - teoretični del, 11.01.2020

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[35 točk]** Naj bosta p in r izjavni spremenljivki. Odgovorite na naslednja vprašanja. Vse odgovore dobro utemeljite.

(a) Ali je izjavni izraz $p \Rightarrow r$ tavtologija?

Ne. Za $p = 1$ in $r = 0$ vrednost izraza ni 1: $1 \Rightarrow 0 \sim 0$.

(b) Ali je izjavni izraz $(p \Rightarrow r) \Rightarrow p$ tavtologija?

Ne. Za $p = 0$ in $r = 0$ vrednost izraza ni 1: $(0 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \sim 1 \Rightarrow 0 = 0$.

(c) Ali je izjavni izraz $((p \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ tavtologija?

Da. Preveriti moramo, da ima pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk p in r izjavni izraz vrednost 1:

$$
\begin{aligned}
p = 1, r = 1: &\quad ((1 \Rightarrow 1) \Rightarrow 1) \Rightarrow 1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1,\\
p = 1, r = 0: &\quad ((1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1) \Rightarrow 1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1,\\
p = 0, r = 1: &\quad ((0 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \sim (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1,\\
p = 0, r = 0: &\quad ((0 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \sim (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1.
\end{aligned}
$$

(d) Samo z uporabo izjavnega izraza $((p \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow p$, veznika $\Rightarrow$ in konstante 0 zapišite izjavni izraz, ki je protislovje.

$(((p \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow 0$.

- Prve tri podnaloge so bile vredne po 10 točk, zadnja pa 5 točk.
- Lahko ste reševali tudi tako, da ste izračunali vse tri resničnostne tabele izjavnih izrazov.
- Lahko ste reševali tudi tako, da ste izraze $p \Rightarrow r$, $(p \Rightarrow r) \Rightarrow p$ in $((p \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ preoblikovali v $\neg p \vee r$, $\neg(\neg p \vee r) \vee p = (p \wedge \neg r) \vee p \sim p$ in $p \Rightarrow p \sim 1$.
- Če ste napisali le odgovore brez utemeljitev, točk niste dobili.
- Če ste se med računanjem resničnostih tabel 1-krat zmotili, ste izgubili 2 točki pri nalogi, kjer ste se zmotili. Tudi, če se je odgovor na vprašanje (1c) spremenil, ste dobili vse točke, v kolikor je bila napaka le pri enem izračunu v točki (1b). Za sistematično napako pri računanju tabel ste dobili največ 10 točk za vse tri dele (1a), (1b) ali (1c).
- Če ste med preoblikovanjem izrazov v (1a), (1b) ali (1c) naredili napako, ste izgubili 5 točk v vsakem delu, kjer se je pojavila napaka. V primeru sistematične napake, pa ste dobili za nalogo dobili največ 10 točk.
- Če ste pri (1b) ali (1c) računali vrednost izraza $p \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ oz. $p \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow p)$, ste dobili največ pol točk pri tem delu.

2. **[30 točk]** Naj bo U univerzalna množica, A, B, C pa njene podmnožice. V jeziku predikatnega računa vsebovanost $A \subseteq B$ izrazimo z izjavno formulo

$$\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

V jeziku predikatnega računa izrazite še naslednje trditve, pri čemer lahko poleg izjavnih veznikov in kvantifikatorjev uporabljate še $\in$ (ne pa tudi $=$, $\subseteq$, $\subset$, $\supseteq$, $\supset$).

(a) $A = B$.

Pravilni odgovor je katerikoli od naslednjih:

- $\forall x \in U : ((x \in A \Rightarrow x \in B) \;\wedge\; (x \in B \Rightarrow x \in A))$,
- $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B) \;\wedge\; \forall x \in U : (x \in B \Rightarrow x \in A)$,
- $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B) \;\wedge\; \forall y \in U : (y \in B \Rightarrow y \in A)$,
- $\forall x \in U : (x \in A \wedge x \in B \;\vee\; \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))$.
- $\forall x \in U : (x \in A \wedge x \in B \;\vee\; x \notin A \wedge x \notin B)$.

(b) $A \cap B = \emptyset$.

Pravilni odgovor je katerikoli od naslednjih:

- $\forall x \in U : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))$,
- $\forall x \in U : (x \notin A \vee x \notin B)$,
- $\forall x \in U : ((x \in A \Rightarrow \neg(x \in B)) \;\wedge\; (x \in B \Rightarrow \neg(x \in A)))$,
- $\forall x \in U : (x \in A \wedge \neg(x \in B) \;\vee\; \neg(x \in A) \wedge x \in B \;\vee\; \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))$.

(c) Če sta množici A in B disjunktni, potem B in C nista disjunktni.

Pravilni odgovor je

$$\forall x \in U : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \Rightarrow \exists x \in U : (x \in B \wedge x \in C).$$

- Vsaka podnaloga je vredna 10 točk.
- Če ste pri delu (2a) odgovorili z $\forall x \in U : (x \in A \wedge x \in B)$, ste dobili 6 točk.
- Pri delu (2b) ste dobili 6 točk, če ste odgovorili z enim od:
  - $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow \neg(x \in B))$,
  - $\forall x \in U : (x \in A \wedge \neg(x \in B) \;\vee\; \neg(x \in A) \wedge x \in B)$.

  Če ste odgovorili z $\forall x \in U : (x \in A \wedge \neg(x \in B))$, ste dobili 4 točke.
- Če ste v delu (2c) odgovorili z $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \neg(B \cap C = \emptyset)$, ste dobili 4 točke. Če ste za $A \cap B = \emptyset$ in $B \cap C = \emptyset$ vstavili formulo, ki ste jo izpeljali v (2b) (četudi napačno), pri čemer sta morala biti B in C vstavljena na ustrezna mesta namesto A in B, ste dobili 8 točk.

---

3. **[35 točk]** Naj bo $f : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **surjektivna** preslikava, $A, B \subseteq \mathbb{N}$ množici in $g : A \to B$ taka preslikava, da je kompozitum $g \circ f : \mathbb{N} \to B$ dobro definirana preslikava. Odgovorite na naslednja vprašanja.

(a) Napišite primer preslikave f z zgornjimi lastnostmi.

Pravilni odgovori so npr.:

- $f(x) = \begin{cases} x, & \text{za } 1 \leq x \leq 5, \\ 1, & \text{sicer.} \end{cases}$
- Katerokoli premešanje števil 1 do 5, vsa ostala števila pa preslikana kamorkoli v množico $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- $f(x) = (x \mod 5) + 1$.

(b) Kaj lahko iz dobre definiranosti $g \circ f$ sklepamo o množici A?

Ker je f surjektivna, je $\mathcal{Z}_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Torej moramo poznati $g(i)$ za vsak $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Zato je $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq A$.

(c) Ali obstaja taka množica A in preslikava $g : A \to \mathbb{N}$, da je $g \circ f$ surjektiven? Odgovor utemelji.

Ne obstaja. Ker je zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ moči 5, je tudi zaloga vrednosti kompozituma $g \circ f$ največ moči 5. Ker je $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bi morala biti tudi slika kompozituma enaka $\mathbb{N}$. To pa ne gre.

(d) Izberite taki množici A, B in preslikavo $g : A \to B$, da bo $g \circ f$ surjektiven.

Npr. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1\}$ in $g(i) = 1$ za vsak $i \in A$.

- Najbolje rešene tri od štirih točk so bile vredne po 10 točk, preostala pa 5 točk.
- V (3a) ste dobili 7 točk, če niste napisali predpisa za točke različne od 1,2,3,4,5.
- V (3b) ste dobili 7 točk, če ste napisali, da je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- V primeru napačne utemeljitve ste za pravilen odgovor pri (3c) dobili 2 točki.
- Če v (3d) niste eksplicitno napisali A in B, pač pa le pravilen g, ste dobili 7 točk.