Tretji rok iz DS - teoretični del, 18.08.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. **[30 točk]** V celi nalogi sta p, q izjavni spremenljivki in $\oplus$ izjavni veznik, za katerega velja

$$\neg p = p \oplus p \quad \text{in} \quad p \vee q = (p \oplus p) \oplus (q \oplus q).$$

(a) Ali je nabor $\{\oplus\}$ poln? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Nabor $\{\oplus\}$ je poln, saj se da z njim izraziti oba veznika iz polnega nabora $\{\neg, \vee\}$.

(b) Samo z uporabo $\oplus$ izrazite $p \Rightarrow q$.

Rešitev.

$$p \Rightarrow q \ \sim\ \neg p \vee q \ \sim\ (p \oplus p) \vee q \ \sim\ ((p \oplus p) \oplus (p \oplus p)) \oplus (q \oplus q)$$

(c) Napišite preneksno normalno obliko izjavne formule $I \oplus I$, kjer je I izjavna formula

$$\forall x \exists y : ((P(x) \oplus P(x)) \oplus (Q(y) \oplus Q(y))).$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} I \oplus I \ &\sim\ \neg \forall x \exists y : ((P(x) \oplus P(x)) \oplus (Q(y) \oplus Q(y))) \\ &\sim\ \neg \forall x \exists y : (P(x) \vee Q(y)) \\ &\sim\ \exists x \forall y : (\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \end{aligned}$$

---

2. **[30 točk]** V celi nalogi so dane množice $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ in $Z = \{F, G\}$. Naj bodo $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ in $h : Z \to X$ neke preslikave. V nalogi nas bodo zanimali še kompozitumi:

$$g \circ f, \quad f \circ h, \qquad h \circ g \circ f \quad \text{in} \quad g \circ h \circ f. \tag{$*$}$$

(a) Navedite primer preslikave g, ki je surjektivna.

Rešitev. $g(1) = g(2) = F$, $g(3) = G$.

(b) Enega od kompozitumov iz $(*)$ ne bomo mogli izračunati za nobeno trojico f, g, h. Navedite, kateri je to in kje je težava.

Rešitev. Kompozitum $g \circ h \circ f$ ni smiseln, saj f slika v Y, definicijsko območje h pa je Z.

(c) Samo eden od kompozitumov iz (∗) je lahko injektivna preslikava za neko trojico f, g, h. Navedite, kateri je to in napišite primer preslikav f, g, h, za katere je ta kompozitum res injektivna preslikava.

Rešitev. Injektivna preslikava je lahko $f \circ h$. Npr., $h(F) = a$, $h(G) = b$, $f(a) = f(c) = f(d) = 1$, $f(b) = 2$. Preslikave g ne potrebujemo.

---

3. **[40 točk]**

(a) Poiščite celo število b, za katerega enačba $4x + by = 20$ ima celoštevilske rešitve ($x, y \in \mathbb{Z}$), enačba $4x + 20y = b$ pa jih nima.

Rešitev. Da bo imela enačba $4x + by = 20$ celoštevilske rešitve, mora $\gcd(4, b)$ deliti 20. Da enačba $4x+20y = b$ ne bo imela celoštevilskih rešitev, pa $4 = \gcd(4, 20)$ ne sme deliti b. Primeri so $b = 1$, $b = 2$, $b = 6$, ...

(b) Relacija $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ je podana s predpisom

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, y_1) \text{ in } (x_2, y_2) \text{ sta rešitvi diofantske enačbe } 2x + 3y = 5.$$

Napišite vsaj 2 elementa iz definicijskega območja relacije R.

Rešitev. V definicijskem območju R so ravno vsi pari (x, y), ki rešijo enačbo $2x + 3y = 5$. Npr. $(1, 1), (4, -1), (7, -3), \ldots$.

(c) Grafu G z 2022 vozlišči odstranimo 5 povezav in dobimo graf z 2016 povezavami. Ali je G lahko Hamiltonov? Če je odgovor da, navedite primer takega grafa, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Graf G ni Hamiltonov, saj bi moral imeti vsaj 2022 povezav (da ima lahko cikel), ima pa jih samo 2021.

(d) Naj bo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & x & y & 2 & z & w & 5 \end{pmatrix}$$

delno določena permutacija. Določite x, y, z tako, da bo φ^2 identična permutacija.

Rešitev. Velja $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) = i$. Vstavimo zaporedoma $i = 1, 4, 7$:

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi^2(1) = \varphi(\varphi(1)) = \varphi(3) = y, \\ 4 &= \varphi^2(4) = \varphi(\varphi(4)) = \varphi(2) = x, \\ 7 &= \varphi^2(7) = \varphi(\varphi(7)) = \varphi(5) = z. \end{aligned}$$

Ker je φ permutacija, imamo za $\varphi(6)$ samo eno možnost, tj. $6 = w$.

Tretji rok iz DS - teoretični del, 18.08.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. **[30 točk]** V celi nalogi sta p, q izjavni spremenljivki in $\oplus$ izjavni veznik, za katerega velja

$$\neg p = p \oplus p \quad \text{in} \quad p \vee q = (p \oplus q) \oplus (p \oplus q).$$

(a) Ali je nabor $\{\oplus\}$ poln? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Nabor $\{\oplus\}$ je poln, saj se da z njim izraziti oba veznika iz polnega nabora $\{\neg, \vee\}$.

(b) Samo z uporabo $\oplus$ izrazite $p \Rightarrow q$.

Rešitev.

$$p \Rightarrow q \;\sim\; \neg p \vee q \;\sim\; (p \oplus p) \vee q \;\sim\; ((p \oplus p) \oplus q) \oplus ((p \oplus p) \oplus q)$$

(c) Napišite preneksno normalno obliko izjavne formule $I \oplus I$, kjer je I izjavna formula

$$\forall x \exists y : ((P(x) \oplus Q(y)) \oplus (P(x) \oplus Q(y))).$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} I \oplus I &\sim \neg \forall x \exists y : ((P(x) \oplus Q(y)) \oplus (P(x) \oplus Q(y))) \\ &\sim \neg \forall x \exists y : (P(x) \vee Q(y)) \\ &\sim \exists x \forall y : (\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \end{aligned}$$

---

2. **[30 točk]** V celi nalogi so dane množice $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{A, B, C\}$ in $Z = \{1, 2\}$. Naj bodo $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ in $h : Z \to X$ neke preslikave. V nalogi nas bodo zanimali še kompozitumi:

$$g \circ f, \quad f \circ h, \qquad h \circ g \circ f \quad \text{in} \quad g \circ h \circ f. \qquad (*)$$

(a) Navedite primer preslikave g, ki je surjektivna.

Rešitev. $g(A) = g(B) = 1$, $g(C) = 2$.

(b) Enega od kompozitumov iz $(*)$ ne bomo mogli izračunati za nobeno trojico f, g, h. Navedite, kateri je to in kje je težava.

Rešitev. Kompozitum $g \circ h \circ f$ ni smiseln, saj f slika v Y, definicijsko območje h pa je Z.

(c) Samo eden od kompozitumov iz $(*)$ je lahko injektivna preslikava za neko trojico f, g, h. Navedite, kateri je to in napišite primer preslikav f, g, h, za katere je ta kompozitum res injektivna preslikava.

Rešitev. Injektivna preslikava je lahko $f \circ h$. Npr., $h(1) = a$, $h(2) = b$, $f(a) = f(c) = f(d) = A$, $f(b) = B$. Preslikave g ne potrebujemo.

---

3. **[40 točk]**

(a) Poiščite celo število b, za katerega enačba $9x + by = 36$ ima celoštevilske rešitve ($x, y \in \mathbb{Z}$), enačba $9x + 36y = b$ pa jih nima.

Rešitev. Da bo imela enačba $9x + by = 36$ celoštevilske rešitve, mora $\gcd(9, b)$ deliti 36. Da enačba $9x+36y = b$ ne bo imela celoštevilskih rešitev, pa $9 = \gcd(9, 36)$ ne sme deliti b. Primeri so $b = 1$, $b = 3$, $b = 6$, $\ldots$.

(b) Relacija $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ je podana s predpisom

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, y_1) \text{ in } (x_2, y_2) \text{ sta rešitvi diofantske enačbe } 5x + 2y = 3.$$

Napišite vsaj 2 elementa iz definicijskega območja relacije R.

Rešitev. V definicijskem območju R so ravno vsi pari (x, y), ki rešijo enačbo $5x + 2y = 3$. Npr. $(1, -1), (3, -6), (-1, 4), \ldots$.

(c) Grafu G z 2022 vozlišči odstranimo 7 povezav in dobimo graf z 2014 povezavami. Ali je G lahko Hamiltonov? Če je odgovor da, navedite primer takega grafa, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Graf G ni Hamiltonov, saj bi moral imeti vsaj 2022 povezav (da ima lahko cikel), ima pa jih samo 2021.

(d) Naj bo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & y & z & x & 2 & 3 & w \end{pmatrix}$$

delno določena permutacija. Določite x, y, z tako, da bo φ^2 identična permutacija.

Rešitev. Velja $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) = i$. Vstavimo zaporedoma $i = 1, 5, 6$:

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi^2(1) = \varphi(\varphi(1)) = \varphi(4) = x, \\ 5 &= \varphi^2(5) = \varphi(\varphi(5)) = \varphi(2) = y, \\ 6 &= \varphi^2(6) = \varphi(\varphi(6)) = \varphi(3) = z. \end{aligned}$$

Ker je φ permutacija, imamo za $\varphi(7)$ samo eno možnost, tj. $7 = w$.

Tretji rok iz DS - teoretični del, 18.08.2022

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri tem je vsako podvprašanje vsake naloge vredno 10 točk.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

---

1. **[30 točk]** V celi nalogi sta p, q izjavni spremenljivki in $\otimes$ izjavni veznik, za katerega velja

$$\neg p = p \otimes p \quad \text{in} \quad p \vee q = (p \otimes q) \otimes (p \otimes q).$$

(a) Ali je nabor $\{\otimes\}$ poln? Odgovor utemeljite.

Rešitev. Nabor $\{\otimes\}$ je poln, saj se da z njim izraziti oba veznika iz polnega nabora $\{\neg, \vee\}$.

(b) Samo z uporabo $\otimes$ izrazite $p \otimes q$.

Rešitev.

$$p \Rightarrow q \;\sim\; \neg p \vee q \;\sim\; (p \otimes p) \vee q \;\sim\; ((p \otimes p) \otimes q) \otimes ((p \otimes p) \otimes q)$$

(c) Napišite preneksno normalno obliko izjavne formule $I \otimes I$, kjer je I izjavna formula

$$\forall x \exists y : ((P(x) \otimes Q(y)) \otimes (P(x) \otimes Q(y))).$$

Rešitev.

$$\begin{aligned} I \otimes I \;&\sim\; \neg \forall x \exists y : ((P(x) \otimes Q(y)) \otimes (P(x) \otimes Q(y))) \\ &\sim\; \neg \forall x \exists y : (P(x) \vee Q(y)) \\ &\sim\; \exists x \forall y : (\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \end{aligned}$$

---

2. **[30 točk]** V celi nalogi so dane množice $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{A, B, C\}$ in $Z = \{a, b\}$. Naj bodo $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ in $h : Z \to X$ neke preslikave. V nalogi nas bodo zanimali še kompozitumi:

$$g \circ f, \quad f \circ h, \qquad h \circ g \circ f \quad \text{in} \quad g \circ h \circ f. \tag{$*$}$$

(a) Navedite primer preslikave g, ki je surjektivna.

Rešitev. $g(A) = g(B) = a$, $g(C) = b$.

(b) Enega od kompozitumov iz $(*)$ ne bomo mogli izračunati za nobeno trojico f, g, h. Navedite, kateri je to in kje je težava.

Rešitev. Kompozitum $g \circ h \circ f$ ni smiseln, saj f slika v Y, definicijsko območje h pa je Z.

(c) Samo eden od kompozitumov iz $(*)$ je lahko injektivna preslikava za neko trojico f, g, h. Navedite, kateri je to in napišite primer preslikav f, g, h, za katere je ta kompozitum res injektivna preslikava.

Rešitev. Injektivna preslikava je lahko $f \circ h$. Npr., $h(a) = 1$, $h(b) = 2$, $f(1) = f(3) = f(4) = A$, $f(2) = B$. Preslikave g ne potrebujemo.

---

3. **[40 točk]**

(a) Poiščite celo število b, za katerega enačba $4x + by = 12$ ima celoštevilske rešitve ($x, y \in \mathbb{Z}$), enačba $4x + 12y = b$ pa jih nima.

Rešitev. Da bo imela enačba $4x + by = 12$ celoštevilske rešitve, mora $\gcd(4, b)$ deliti 12. Da enačba $4x+12y = b$ ne bo imela celoštevilskih rešitev, pa $4 = \gcd(4, 12)$ ne sme deliti b. Primeri so $b = 1$, $b = 2$, $b = 6$, ...

(b) Relacija $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ je podana s predpisom

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, y_1) \text{ in } (x_2, y_2) \text{ sta rešitvi diofantske enačbe } 5x + 3y = 2.$$

Napišite vsaj 2 elementa iz definicijskega območja relacije R.

Rešitev. V definicijskem območju R so ravno vsi pari (x, y), ki rešijo enačbo $5x + 3y = 2$. Npr. $(1, -1), (3, -4), (-2, 4), \ldots$.

(c) Grafu G z 2022 vozlišči odstranimo 8 povezav in dobimo graf z 2013 povezavami. Ali je G lahko Hamiltonov? Če je odgovor da, navedite primer takega grafa, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Rešitev. Graf G ni Hamiltonov, saj bi moral imeti vsaj 2022 povezav (da ima lahko cikel), ima pa jih samo 2021.

(d) Naj bo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ x & 4 & w & y & z & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

delno določena permutacija. Določite x, y, z tako, da bo φ^2 identična permutacija.

Rešitev. Velja $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) = i$. Vstavimo zaporedoma $i = 2, 6, 7:$

$$\begin{aligned} 2 &= \varphi^2(2) = \varphi(\varphi(2)) = \varphi(4) = y, \\ 6 &= \varphi^2(6) = \varphi(\varphi(6)) = \varphi(5) = z, \\ 7 &= \varphi^2(7) = \varphi(\varphi(7)) = \varphi(1) = x. \end{aligned}$$

Ker je φ permutacija, imamo za $\varphi(3)$ samo eno možnost, tj. $3 = w$.
