

Diskretne strukture VSP: prvi kolokvij

27. 11. 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Trimestni izjavni veznik A je definiran z opisom

$$A(p, q, r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee r,$$

zaporedje izjavnih izrazov pa definiramo z začetnima členoma $A_1 = q \Rightarrow p$, $A_2 = p \wedge \neg q$ in pri $n \geq 3$ z rekurzivno zvezo

$$A_n = A(A_{n-2}, p, A_{n-1}).$$

a) (10 točk) Izračunaj prvih šest členov zaporedja $(A_i, i \in \mathbb{N})$.

b) (8 točk) Pokaži, da za vsako naravno število $k \geq 1$ velja trditev:

Če sta člena A_k in A_{k+1} tautologiji, potem sta tudi člena A_{k+1} in A_{k+2} tautologiji.

c) (7 točk) S pomočjo matematične indukcije izračunaj A_{2024} .

2. naloga (25 točk)

Dan je sklep

$$\neg r \vee p, \quad r \vee s, \quad s \Rightarrow \neg p, \quad q \vee (r \Rightarrow s) \quad \vdash \quad p \Rightarrow q.$$

a) (15 točk) Preveri, da je sklep pravilen, in zapiši formalen dokaz tega sklepa.

b) (10 točk) Ali sklep ostane pravilen, če zaključek $p \Rightarrow q$ zamenjamo s $p \vee q$? Zakaj?

3. naloga (25 točk)

V področju pogovora *živalskih vrst* uporabimo predikate R , A , H z naslednjimi pomeni:

$A(x) \dots x$ živi v Afriki. $R(x) \dots x$ ima rep. $H(x, y) \dots x$ je hitrejši od y .

Tako $R(\text{lev})$ formalizira izjavo "Lev ima rep."

Izjavo " x je hitrejši od slona." pa formaliziramo s formulo $H(x, \text{slon})$.

Formaliziraj naslednje izjave. Pri tem smiselno definiraj potrebne manjkajoče predikate.

- a) (5 točk) *Nekatere živali nimajo repa.*
- b) (5 točk) *Vsaka afriška žival zna plavati.*
- c) (5 točk) *Nekatere afriške živali nimajo repa in ne znajo plavati.*
- d) (5 točk) *Slon je najhitrejša žival.*
- e) (5 točk) *Najhitrejša žival živi v Afriki in zna plavati.*

4. naloga (25 točk)

Naj bodo A , B in C poljubne množice. Opazujemo množice

$$U = A + B + C,$$

$$V = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C),$$

$$W = (A + C) \cup (B + A) \cup (C + B).$$

a) (15 točk) Utemelji, da sta množici V in W enaki.

b) (10 točk) Pokaži, da v splošnem *ne velja* vsebovanost $U \subseteq V$. Ravno tako pokaži, da v splošnem *ne velja* vsebovanost $W \subseteq U$.