

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Diskretne strukture: drugi izpit

3. februar 2025

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Zaporedje števil $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je definirano z začetnima členoma $f_1 = 1$, $f_2 = 6$, za $n \geq 3$ pa z rekurzivno zvezo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

a) (5 točk) Izračunaj vse člene zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ki so manjši od 100.

b) (10 točk) Z indukcijo¹ pokaži, da za vsak člen zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (razen morda nekaj začetnih) velja $f_n \leq 2^n$.

c) (10 točk) Z indukcijo pokaži, da za vsak člen zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (razen morda nekaj začetnih) velja $f_n \geq 1,5^n$.

¹Morda boš moral indukcijsko predpostavko uporabiti ne samo na zadnjem členu zaporedja.

2. naloga (25 točk)

Dana sta sklepa z istim naborom predpostavk in različnima zaključkoma:

$$(p \vee r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (s \vee t), t \Rightarrow u, \neg s \wedge \neg u \quad \models \quad p, \quad (1)$$

$$(p \vee r) \Rightarrow q, q \Rightarrow (s \vee t), t \Rightarrow u, \neg s \wedge \neg u \quad \models \quad \neg p. \quad (2)$$

Za vsakega od sklepov (1), (2) bodisi poišči protiprimer bodisi zapiši formalen zapis pravilnosti.

3. naloga (25 točk)

Preslikava $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je definirana z opisom

$$f(n) = \text{vsota vseh lihih števk v desetiškem zapisu števila } n.$$

Tako je npr. $f(2) = 0$, $f(3) = 3$, $f(115) = 1 + 1 + 5 = 7$ in $f(235) = 3 + 5 = 8$.

a) (5 točk) Izračunaj $f(131)$, $f(2418)$ in $f(13579)$.

b) (7 točk) Ali je f injektivna? *Odgovor utemelji!*

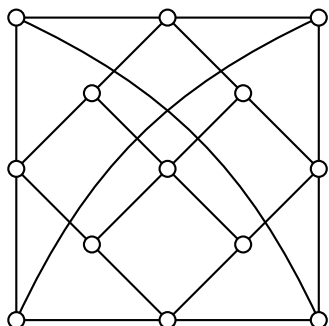
c) (8 točk) Ali je f surjektivna? *Odgovor utemelji!*

d) (5 točk) Poišči najmanjše naravno število n , za katerega je $f(n) = 12$. *Odgovor utemelji!*

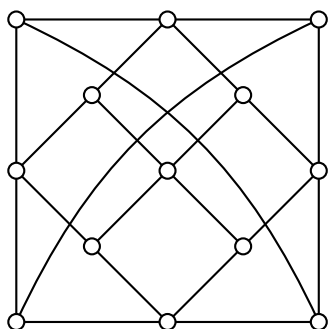
4. naloga (25 točk)

Vsa vprašanja v nalogi se tičejo istega prikazanega grafa G .

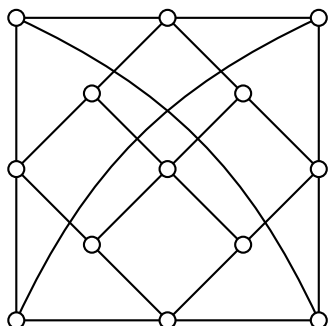
a) (6 točk) Ali je graf G Eulerjev? Poišči Eulerjev obhod ali pokaži, da ta ne obstaja.



b) (6 točk) Utemelji, da graf G ni dvodelen. Najmanj koliko povezav moramo odstraniti iz G , da pridemo dvodelen graf? Katere so te povezave? Utemelji!



c) (6 točk) Določi kromatično število grafa G in ustrezno optimalno barvanje.



d) (7 točk) Ali je G Hamiltonov? Poišči Hamiltonov cikel ali pokaži, da ta ne obstaja.

