

Računalniške tehnologije, seznam nalog rešenih pri vajah

Alen Horvat, Pavel Kos, and Rok Žitko

- Opazujemo procesorja, ki računata s frekvencama ν_1 in ν_2 .
 - Po kolikšnem času po vklopu bosta procesorja v fazi in po kolikšnem času bosta v antifazi?
 - Kaj nam pove fazni zamik?
- Procesorja, ki računata s frekvencama ν_1 in ν_2 , povežemo v skupno enoto. Izračunaj frekvenco in periodo skupne enote.
- Pokaži, da je povprečna hitrost nihanja v enem nihaju enaka 0. Kakšna je povprečna hitrost dušenega nihala?
- Zapiši valovno enačbo.
 - Pokaži, da je $\psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ rešitev valovne enačbe. Kakšna zveza velja med hitrostjo valovanja, valovnim vektorjem in frekvenco?
 - Pojasni količine: amplituda, valovni vektor (kako je povezan z valovno dolžino), frekvenca.
 - Opiši razliko med nihanjem in valovanjem.
 - Pokaži, da je vsota dveh ravnih valov ravni val.
- Opazujemo valovanji s frekvencama ω_1, ω_2 . Izračunaj grupno in fazno hitrost valovanja. Rešitev tudi skiciraj.
- Zapiši načelo superpozicije in ga dokaži.
- Opazujemo valovanje strune, ki je na obeh koncih togo vpeta.
 - Nariši skico in zapiši robne pogoje.
 - Izračunaj frekvenco osnovnega in prvega vzbujenega lastnega valovanja strune.
 - Pojasni pojem stoječega valovanja.
- Michelsonov interferometer je naprava, s pomočjo katere sta Michelson in Morley zavrgla teorijo o obstoju etra. Interferometer sestavljajo: laserski snop, ki gre skozi pol-prepustno zrcalo in se nato od dveh, pravokotno postavljenih, zrcal odbije nazaj do polprepustnega zrcala, kjer se snopa združita in potujeta do detektorja.
 - Na kakšni razdalji morata biti zrcali, da pride do konstruktivne/destruktivne interference?
 - Kakšni morata biti frekvenci dveh valovanj, da lahko pride do interference. Kaj mora veljati za fazo?
- Z uporabo Eulerjeve formule izpelji sinusni/kosinusni adicijski izrek.
- Skozi uklonsko mrežo z mrežno razdaljo L svetimo s svetlobo z valovno dolžino λ . Na oddaljenem zaslonu lahko opazimo interferenčni vzorec. Pod katerimi koti glede na vpadni snov svetlobe lahko opazimo konstruktivno interferenco?
- Izračunaj kinetično in potencialno energijo nedušenega nihanja. Kolikšni sta potencialna in kinetična energija dušenega nihanja?
- Zapiši izraz za gravitacijsko silo. Izračunaj gravitacijsko polje ϕ , namig: $F = -m\nabla\phi$. Za koliko se spremeni potencial ϕ , če telesi odmaknemo za l iz začetne razdalje R ?
- Opiši fotoefekt in izstopno delo. Kolikšna mora biti valovna dolžina fotonov, da pride do fotoefekta v kovini, katere izstopno delo je 4eV ?
- Zapiši Štefan-Boltzmannov zakon za črno telo. Zapiši Kirchhoffov zakon o termičnem sevanju. Pojasni količine, ki nastopajo v enačbah in reši sledečo nalogo:

Sonce lahko obravnavamo kot črno telo. Oцени temperaturo Zemlje ob predpostavki, da sta Sonce in Zemlja idealni črni telesi. Podatki: polmer Sonca: $\approx 7 \cdot 10^8$ m, temperatura Sonca na površini: 5800 K, razdalja med Soncem in Zemljo: ≈ 0.15 Tm. Kolikšna je moč sevanja, ki pade na Zemljo?

Kako se rezultat spremeni, če upoštevamo, da je albedo zemlje $a = 0.3$?
- Oцени, koliko kalorij porabi človeško telo v eni uri zaradi sevanja pri sobni temperaturi (293 K) in pri temperaturi 273 K. $1 \text{ J} = 0.24$ kalorije, 1 g mlečne čokolade vsebuje $5 - 6 \cdot 10^3$ kalorij.
- Zapiši Planckov zakon in pojasni količine, ki nastopajo v enačbi. Kakšna je intenziteta v odvisnosti od valovne dolžine v limiti zelo velikih in zelo malih valovnih dolžin.
- Izračunaj pospešek vesoljske postaje, ki jo poganja svetlobni sevalni tok, če je gostota toka enaka gostoti izsevanega toka črne telesa pri temperaturi $T = 10\text{K}$.

Kolikšen bo pospešek, če se od vesoljske postaje svetloba popolnoma odbija? (v prejšnjem primeru je ladja sevala svetlobo)

17. V kvantni fiziki velikokrat energijo, gibalno in vrtilno količino izrazimo v enotah s Planckovo konstanto. Kolikšna je valovna dolžina delca z energijo E ? Kolikšno energijo in gibalno količino nosi foton z valovno dolžino λ ? Ali lahko fotoni vidne svetlobe povzročijo fotoefekt na železu, če je vezavna energija elektronov na površini 2 eV?
18. Kolikšni sta največja in najmanjša energija fotonov v vidni svetlobi? ($\lambda \in [400, 750]$ nm).
19. Laserska svetloba, ki se uporablja pri prenosu podatkov po optičnih vodnikih ima valovno dolžino $\lambda = 635$ nm. Izračunaj energijo, frekvenco in gibalno količino fotonov v laserskem snopu. Koliko fotonov je v enem laserskem pulzu, ki traja 10 ps, če je moč laserja 1 mW. Kolišna je dolžina pulza?
20. Izračunaj de Broglijevo valovno dolžino teniške žogice z maso $m = 60$ g, ki se gibljejo s hitrostjo 30m/s. Izračunaj de Broglijevo valovno dolžino elektronov, ki se gibljejo s hitrostjo $c/2$. Namig: preveri, ali je mirovna masa elektrona zanemarljiva?
21. Klasične kroglice streljamo proti steni, ki ima dve ločeni odprtini. Za steno je postavljen detektor, ki izmeri, kje je kroglica zadela steno. Kakšna je porazdelitev nabojev, ki jo izmerimo z detektorjem? Kako se rezultat spremeni, če namesto klasičnih kroglic na odprtini svetimo s svetlobo (*streljamo s fotoni*)?
22. Rengentski žarki z valovno dolžino $\lambda = 22$ pm se sipljejo na tanki tarči iz ogljikovih atomov. Žarki se sipljejo pod kotom 85 stopinj. Kolikšna je valovna dolžina (energija) sipanih fotonov?
23. Izračunaj energijo osnovnega stoječega elektromagnetnega valovanja v zaprti kvadratni posodi s stranico L .
24. Naj bosta $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ poljubni kompleksni 2×2 matriki, $\lambda \in \mathbb{C}$ poljuben skalar in vpeljimo operacijo kompleksne adjungacije $A^\dagger = A^{T*} = A^{*T}$ (transpozicija A^T in kompleksna konjugacija A^*). Izračunaj/pokaži sledeče zveze:

$$A^\dagger, (A^\dagger)^\dagger = A, (A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1}, \quad (1)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, (\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger, \quad (2)$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, (A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger. \quad (3)$$

Vektor $c = [1, 2]$ je zapisan v bazi $e_1 = [1, 0], e_2 = [0, 1]$. Žapiši vektor c v bazi $\epsilon_1 = [1, 1]/\sqrt{2}, \epsilon_2 = [1, -1]/\sqrt{2}$.

25. Paulijeve matrike so:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Vpeljimo operaciji komutator:

$$[A, B] = AB - BA \quad (5)$$

in antikomutator

$$\{A, B\} = AB + BA. \quad (6)$$

Pokaži, da za komutatorje velja:

$$[B, A] = -[A, B]. \quad (7)$$

Izračunaj sledeče komutatorje:

$$[\sigma_x, \sigma_y], [\sigma_y, \sigma_z], [\sigma_z, \sigma_x]. \quad (8)$$

Komutatorje lahko izračunamo tudi z uporabo identitete: $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$.

Pokaži še, da so Paulijeve matrike Hermitske (operator A je Hermitski, če velja: $A^\dagger = A$).

26. Pokaži, da velja:

$$[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]. \quad (9)$$

Pokaži, da je komutator $i[A, B]$ Hermitski, če sta operatorja A, B tudi Hermitska.

27. Izrazi operator σ_z v bazi $|+x\rangle, |-x\rangle$ (lastni stanji matrike σ_x).
28. Izračunaj tenzorski produkt $\sigma_z \otimes \sigma_x$.
29. (a) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrik $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.
 (b) Zapiši lastna stanja operatorjev σ_x, σ_z v Diracovem (bra-ket) zapisu.
 (c) Kako se lastni stanji operatorja σ_x izražata z lastnimi stanji operatorja σ_z .
30. Opazujmo spin v stanju $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$.

- (a) Normiraj stanje $|\psi\rangle$.
 (b) S kolikšno verjetnostjo izmerimo spin v stanju $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$?
 (c) Izmerimo, da je spin v stanju $|\uparrow\rangle$. Spin-u po 1. meritvi zelimo izmeriti se x komponento spina. S kolikšno verjetnostjo bomo izmerili spin v stanju $|+x\rangle, |-x\rangle$?
 (d) Pokaži, da je verjetnostna amplituda neodvisna od izbire faze valovne funkcije.
 (e) S kolikšno verjetnostjo izmerimo spin v stanjih $|+x\rangle, |-x\rangle$? (slednji sta lastni stanji operatorja σ_x)

31. Operator P je ortogonalni projektor, če velja $P^2 = P$ in $P^\dagger = P$. Pokaži, da je operator:

$$P = \sum_{i=1}^N |i\rangle\langle i| \quad (10)$$

ortogonalni projektor, kjer so $|i\rangle$ ortonormirana stanja, $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$. $\delta_{i,j}$ je Kroneckerjev delta za katerega velja: $\delta_{i,j} = 1$ če je $i = j$ in $\delta_{i,j} = 0$ sicer.

Pokaži, da je tudi operator $Q = 1 - P$ ortogonalni projektor.

32. Matrični elementi operatorja A v bazi $\{e_i\}$ so $A_{ij} = \langle e_i|A|e_j\rangle$. Kako se izražajo matrični elementi A_{ij} v novi bazi $\{f_i\}$?

33. Zapiši, katerim opazljivkam ustreza Stern-Gerlachov aparat, kadar je gradient polja v posamezni od smeri: x, y, z . Pred meritvijo je spin v stanju $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$. Kolikšna je verjetnost, da je spin po preletu Stern-Gerlachovega aparata:

- en aparat z gradientom v smeri z ,
- dva aparata, prvi z gradientom v smeri z , ki mu sledi aparat z gradientom v smeri x ,
- trije aparati z zaporednimi gradienti v smereh z, x, z ,

v stanju $|\uparrow\rangle$?

34. Katerim točkam na Blochovi sferi ustrezajo lastna stanja Paulijevih matrik?

35. Rengentski žarki z valovno dolžino $\lambda = 22$ pm se sipljejo na tanki tarči iz ogljikovih atomov. Žarki se sipljejo pod kotom 85 stopinj. Kolikšna je valovna dolžina (energija) sipanih fotonov? (Comptonov pojav)

36. Ponovi vektorske in matrične operacije: skalarni ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$) in tenzorski ($\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$) produkt vektorjev, matrično množenje (AB), tenzorski produkt matrik ($A \otimes B$), množenje matrike in vektorja ($A\mathbf{v}$), izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike. Matriko: transponiraj (A^T), kompleksno-konjugiraj (A^*), hermitsko-adjungiraj (A^\dagger).

37. Pokaži, da je operator časovnega razvoja $U = e^{iHt}$ unitaren. Namig: operator U je unitaren, če velja: $U^\dagger U = U U^\dagger = I$.

38. Izračunaj časovni razvoj operatorjev S_x, S_y, S_z za elektron, ki se nahaja v magnetnem polju, ki kaže v smeri z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

39. Pokaži, da Bellovo stanje $\psi = 1/\sqrt{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ ni separabilno. Pokaži, da kvantno kopiranje ni možno.

40. (a) Zapiši bazo kubitnega stanja z vektorji in v Diracovem zapisu.

(b) Iz baze za kubit sestavi bazo za 2-kubitno stanje. (Bazo zapiši z vektorji in v Diracovem zapisu)

(c) Delovanje operatorja U_{NOT} na kubitna stanja je:

$$U_{NOT}|0\rangle = |1\rangle \quad (11)$$

$$U_{NOT}|1\rangle = |0\rangle \quad (12)$$

Zapiši operator U_{NOT} v matrični obliki. Kateri Paulijevi matriki ustreza?

(d) Opiši delovanje kvantnih vrat σ_z na kubitna stanja. Zakaj operator imenujemo tudi *phase-flip* vrata?

(e) Opiši delovanje kvantnih vrat σ_y na kubitna stanja.

(f) Delovanje Hadamardovega operatorja H na kubitna stanja je:

$$H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (13)$$

$$H|1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (14)$$

$$(15)$$

Zapiši Hadamardov operator v matrični obliki.

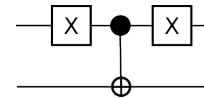
41. Pokaži, da za Hadamardov operator veljajo sledeče identitete:

$$H X H = Z, \quad (16)$$

$$H Y H = -Y, \quad (17)$$

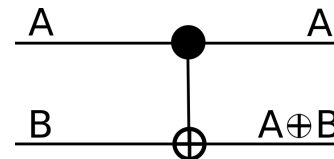
$$H Z H = X. \quad (18)$$

42. Oglej si dvokubična vrata na spodnji sliki in zapiši njihovo delovanje v matrični obliki. Kateri (že



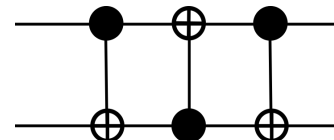
znani) operaciji ustrezajo ta kvantna vrata?

43. Oglej si dvokubična vrata na spodnji sliki in zapiši njihovo delovanje v matrični obliki. Operacija $A \oplus$



$B == \text{mod}(A + B, 2)$ (modulo operator) je ostanek pri deljenju $A + B$ z 2.

44. Oglej si dvokubična vrata na spodnji sliki in zapiši njihovo delovanje na dvo-kubitna stanja.



45. Izračunaj delovanje operatorjev:

$$I \otimes I, \quad (19)$$

$$X \otimes I, \quad (20)$$

$$X \otimes Z, \quad (21)$$

$$Z \otimes X, \quad (22)$$

$$H \otimes I, \quad (23)$$

$$H \otimes H \quad (24)$$

na stanji $|10\rangle$ in $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

46. (3. naloga, 2. kolokvij 2018) Deutshev algoritem za 2 kubita: Imamo funkcijo f , ki pripiše zaporedju ničel in enk dolžine n rezultat 0 ali 1. Želimo ločiti med primeroma, ko je f konstantna in vedno vrne 0 (1) in primerom ko za polovico zaporedij vrne 1 in za drugo polovico 0. Primer:

$$\begin{aligned} f(0010101) = 1 & \quad f(0010111) = 1 & \quad f(\dots) = 1 \\ f(0010101) = 1 & \quad f(0010111) = 0 & \quad f(\dots) = 1 \text{ ali } 0 \end{aligned}$$

Klasično problem zahteva, da v najslabšem primeru pogledamo kako deluje funkcija za polovico ($2^{n-1} + 1$) konfiguracij. Deutshev kvantni algoritem da eksponentno pohitritev v primerjavi s klasičnim algoritmom. V nadaljevanju obravnavajmo najenostavnejši primer $n = 1$.

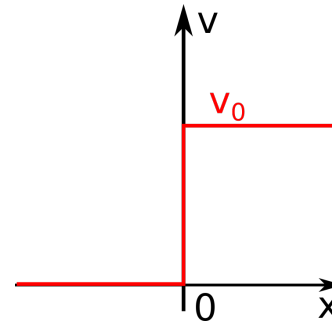
- Zapiši Hadamardov operator H .
- Zapiši kakšna stanja dobimo iz baznih stanj dveh kubitov, če na njih delujemo s Hadamardovema operatorjema na oba kanala (Izračunaj $(H \otimes H)|00\rangle$, $(H \otimes H)|01\rangle$, $(H \otimes H)|10\rangle$, $(H \otimes H)|11\rangle$).
- Kvantna implementacija funkcije f nam da iz $|a\rangle|b\rangle$ za rezultat $U_f|a\rangle|b\rangle = |a\rangle|b + f(a)\rangle$ (modulo 2). Ko s funkcijo f delujemo na stanje $(H \otimes H)|01\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle)$, dobimo stanje (modulo faza)

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{(-1)^{f(0)+f(1)}}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|01\rangle - \frac{(-1)^{f(0)+f(1)}}{2}|11\rangle \quad (25)$$

Če to pokažeš dobiš bonus točke. (Namig: najprej izračunaj delovanje funkcije na bazi: izračunaj $U_f|00\rangle$, ...).

- S Hadamardovim operatorjem delujemo na oba kanala $(H \otimes H)$ stanja iz točke c), katero stanje dobimo?
- Kaj moramo pomeriti, da lahko ločimo med konstantno in uravnoteženo funkcijo f , in kateri rezultat ustreza kateremu primeru?

47. Izračunaj energijo elektrona v neskončni potencialni jami. Kakšnim robnim pogojem mora rešitev zadostiti?



48. Izračunaj valovno funkcijo elektrona, ki se giblje v potencialu, kot je prikazano na sliki: Izračunaj energijo, valovni vektor, odbojnost in prepustnost potencialne stopnice, če je energija elektrona večja ali manjša od višine potencialne stopnice.

49. Izpeljite enačbo za verjetnost, da prost elektron z energijo E tunelira skozi pravokotono potencialno oviro višine V in širine a .

50. Izračunaj verjetnost, da elektron tunelira skozi pravokotno potencialno ovir, če je potencial $V = 2E$. Kakšna je rešitev, če ima elektron energijo $E = 2V$?

51. Izračunaj verjetnost (za 3 podane energije elektrona), da elektron z energijo $E = 0, \pm 1/2\pi$ tunelira skozi potencialno jamo parabolične oblike: $V = -kx^2/2$, če je transmisivnost/prepustnost enaka:

$$T(E) = \frac{1}{1 + e^{-2\pi E}}. \quad (26)$$

Kakšen rezultat dobimo v limiti $E \rightarrow \pm\infty$?

52. (Naloga 6.1 iz zbirke). Elektronu izmerimo koordinato na 10 mm natančno. S kolikšno natančnostjo lahko izmerimo njegovo hitrost? Tekoču na 100 m lahko izmerijo koordinato x na 1 mm natančno (določena točka njegovega telesa). S kolikšno največjo natančnostjo lahko v principu hkrati izmerijo njegovo komponento hitrosti v_x , če je njegova masa 80 kg?

53. (Naloga 6.2 iz zbirke). Energijo vodikovega atoma v osnovnem stanju v kvantni mehaniki lahko ocenimo na naslednji način. Energija je vsota kinetične in elektrostaticne energije:

$$E = mv^2/2 - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (27)$$

kjer je $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ masa elektrona, $e_0 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ osnovni naboj, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ influenčna konstanta, r neka efektivna (povprečna) razdalja med elektronom in jedrom, v pa hitrost kroženja elektrona po Bohrovi planetarni interpretaciji gibanja elektrona. Po Heisenbergovem načelu nedoločenosti ocenimo zvezo med polmerom r in hitrostjo v kot: $v \sim$

$h/(4\pi mr)$, kjer je h Planckova konstanta. Ta pogoj dobimo tako, da neenačbo $\delta x \delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ nadomestimo z enačbo in prepisemo $x \rightarrow r$, $p_x \rightarrow mv$. Izračunajte energijo z njeno minimizacijo po polmeru r , hkrati pa ocenite tudi r in v .

54. (Naloga 8.1 iz zbirke). Razlika med sosednjima energijskima nivojema elektrona v vodikovem atomu je 0.306 eV. Katerima kvantnima stanjema $n, n+1$ ustreza ta razlika?

55. (Naloga 8.2 iz zbirke). Elektron v vodikovem atomu preide iz kvantnega stanja $n=4$ v nižje energijsko stanje tako, da odda foton z valovno dolžino 485.3 nm. V katero nižje kvantno stanje preide?

56. (Naloga 8.3 iz zbirke).

57. (Naloga 8.5 iz zbirke). Poišči minimum Lennard-Jonesovega potenciala:

$$V(r) = \epsilon \left[\frac{a^{12}}{r^{12}} - \frac{a^6}{r^6} \right]. \quad (28)$$

Kakšen je potencial v limitah $r \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$?

58. Naloga 8.7 iz zbirke.

59. Naloga 8.9 iz zbirke.

60. Naloga 8.10 iz zbirke.

61. Naloga 9.1 iz zbirke.

62. Naloga 9.2 iz zbirke.

63. Naloga 9.5 iz zbirke.

64. Naloga 9.6 iz zbirke.

65. Poišči recipročno mrežo za trikotno mrežo z baznimi vektorji: $\mathbf{a}_1 = a/2(\sqrt{3}, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = a/2(\sqrt{3}, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = c(0, 0, 1)$.

66. Izračunaj gostoto stanj $g(\epsilon)$ za 3D elektronski plin.

67. Kateri pogoj mora biti izpolnjen za gostotno matriko:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (29)$$

da le-ta opisuje čisto stanje?

68. Pri kvantnem računanju je pripravno kubitna stanja nadomestiti z ustreznimi več-kubitnimi stanji, da zmanjšamo verjetnost za napako. CNOT vrata označimo C_{12} . Prvi indeks označuje kontrolni kubit, drugi indeks označuje ciljni kubit. Pokaži, da velja:

$$C_{21}C_{20}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle. \quad (30)$$

69. Izračunaj gostoto prevodnih elektronov n pri sobni temperaturi, za sledeče energijske rezxe $E_g \in \{0, 1.1, 4\}$ eV. Izračunaj, kolikšna je energijska rezxa, če je gostota prevodnih elektronov enaka $n = 10^{15}, 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Izračunaj Hallovo konstantno R_H za vseh 5 zgoraj omenjenih primerov.

70. Naloga 9.13 v zbirki.

71. Naloga 9.14 v zbirki.

72. Kako velika mora biti energijska reža v polprevodniku, da bo le-ta prozoren?

73. Za koliko se spremeni zaporni tok diode, če se temperatura spremeni za 10%?