1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči (tanki) QR razcep matrike A, tj. zapiši $A = QR$, kjer je matrika Q ortogonalna (stolpci Q tvorijo ortonormirano bazo $C(Q) = C(A)$), matrika R pa zgornje trikotna.
   Namig: Pomagaj si z 2. nalogo iz 9. tedna vaj.

   (b) Z uporabo Q zapiši matriki pravokotnih projekcij na $C(A)$ in $N(A^{\mathsf{T}})$. Za $N(A^{\mathsf{T}})$ si lahko pomagaš z dejstvom $N(A^{\mathsf{T}}) = C(A)^{\perp}$.

   (c) Ponovno poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [1,1,1,5]^{\mathsf{T}}$ na $C(A)$.

Rešitev: (a) Iz (a) in (b) dela 2. naloge 9. tedna: $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(b) Matrika pravokotne projekcije na $C(A)$ je $P_{C(A)} = QQ^{\mathsf{T}}$. Matrika pravokotne projekcije na $N(A^{\mathsf{T}}) = C(A)^{\perp}$ je $P_{C(A)^{\perp}} = I - P_{C(A)} = I - QQ^{\mathsf{T}}$ (saj spološno velja $P_{V^{\perp}} = I - P_V$).
(c) $P_{C(A)}\mathbf{v} = QQ^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = [3,1,1,3]^{\mathsf{T}}$.

2. Dana sta matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ in vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   (a) Ali je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv?

   (b) Zapiši vektor $\mathbf{b}$ kot vsoto $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{e}$ tako, da bo vektor $\mathbf{b}'$ v $C(A)$, vektor $\mathbf{e}$ pa bo na $C(A)$ pravokoten. Je taka vsota enolična?

   (c) Poišči rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

Rešitev: (a) Ni. (b) $\mathbf{b}' = [4,2,3]^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{e} = [-2,1,2]^{\mathsf{T}}$. Vsota $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{e}$ je enolična. (c) $\mathbf{x} = [2,-1]^{\mathsf{T}}$.

3. Funkcijo f imamo dano pri petih vrednostih argumenta x:

x_i	-1	0	1	2	4
$f(x_i)$	-3	-1	1	2	2

   Želimo jo aproksimirati s funkcijo oblike $g(x) = ax + b$.

   (a) Iz enakosti $g(x_i) = f(x_i)$ dobimo (predoločen) sistem linearnih enačb za a in b. Zapiši ta predoločen sistem; $A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{f}$!

   (b) Zapiši pripadajoč normalni sistem; $A^{\mathsf{T}}A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{f}$.

   (c) Določi parametra a in b po metodi najmanjših kvadratov, da bo g najboljša aproksimacija za f pri zgornjih podatkih.

Rešitev: (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (b) $A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 22 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, $A^\mathsf{T}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(c) $a = 1$, $b = -1$, torej $g(x) = x - 1$.

4. Izmerjene vrednosti iz tabele

x	-2	-1	1	2
y	18	2	4	12

želimo aproksimirati s funkcijama f in g oblike

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ in } \; g(x) = ax^2 + c$$

po linearni metodi najmanjših kvadratov.

(a) Zapiši pripadajoča predoločena sistema.

(b) Reši ustrezna normalna sistema.

(c) Oceni vrednost, ki bi jo izmeril pri $x = 0$.

Rešitev: (a) Za funkcijo f je matrika sistema $A_f = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, za funkcijo g je matrika sistema $A_g = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Desna stran je v obeh primerih $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$.
(b) Sistem $A_f^\mathsf{T} A_f \mathbf{x}_f = A_f^\mathsf{T}\mathbf{b}$ ima rešitev $\mathbf{x}_f = [a, b, c]^\mathsf{T} = [4, -1, -1]^\mathsf{T}$, torej $f(x) = 4x^2 - x - 1$. Sistem $A_g^\mathsf{T} A_g \mathbf{x}_g = A_g^\mathsf{T}\mathbf{b}$ ima rešitev $\mathbf{x}_g = [a, c]^\mathsf{T} = [4, -1]^\mathsf{T}$, torej $g(x) = 4x^2 - 1$.
(c) Ocenjena vrednost je vrednost funkcije pri $x = 0$, torej $f(0) = -1$ oziroma $g(0) = -1$.