12. PREDAVANJA

Ponovitev

opazimo: $u = 1 + x^2$
$du = 2x\,dx$
$dx = \frac{1}{2x}\,du$

(1) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

$$= \int \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot x\,dx \overset{u=1+x^2}{=} \int \frac{1}{2} \overbrace{\frac{1}{u^2}}^{u^{-2}} \cdot x\,du$$

$$\overset{PP}{=} -\frac{1}{2} u^{-1}_{(x)} \cdot x - \left(-\frac{1}{2} \int u^{-1}(x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

(2) $\int e^x \sin(x)\,dx =: I$

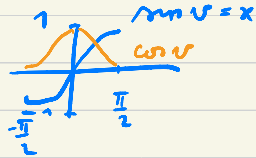
$$I \overset{PP}{=} -e^x \cos(x) + \underbrace{\int e^x \cos(x)\,dx}_{PP}$$

$$= -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \sin(x)\,dx}_{I}$$

$$I = e^x(\sin(x) - \cos(x)) - I$$
$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) + C$$

③ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ za $-1 \leq x \leq 1$

$x = \sin v$
$dx = \cos v\, dv$



$\cos v \geq 0$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 v}\,\cos v\, dv = \int \sqrt{\cos^2 v}\,\cos v\, dv$$

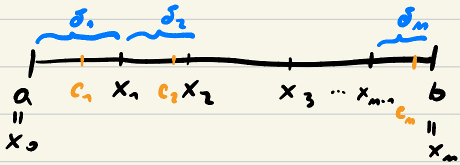
$$= \int \cos^2 v\, dv = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos(2v))\, dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\arcsin(x) + \tfrac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + C$$

DOLOČENI INTEGRAL

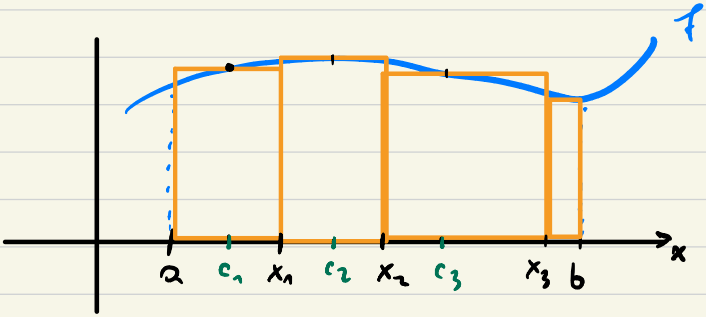
Za $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bi radi izračunali ploščino območja med x-osjo in grafom funk. f na $[a,b]$.

Interval $[a,b]$ razdelimo na n podintervalov:



Izberemo si vmesne točke $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$

Riemannova vsota : $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\delta_k$ je približek za iskano ploščino.



Če je funkcija f zvezna, je v limiti, ko gre $n\to\infty$, dobljeni lik čedalje bolj podoben liku pod grafom funk. f.

Določen integral funk. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je število $I\in\mathbb{R}$, za katerega velja, da za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, tako da za vse Riemannove vsote $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\delta_k$, ki zadoščajo $\delta_k<\delta$ za vsak $k=1,2,\dots,n$ velja

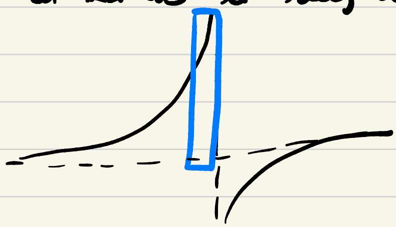
$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\delta_k - I\right| < \varepsilon .$$

Funkciji f, za katero določen integral $I\in\mathbb{R}$ obstaja, pravimo, da je **integrabilna**, integral I pa označimo kot

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

TRDITEV: Če je funk. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna, potem je omejena na $[a,b]$.

DOKAZ: Če f ne bi bila omejena na $[a,b]$, potem bi za poljubno delitev $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ in poljubno veliko število $N \in \mathbb{N}$ obstajala točka c_k, za katero bi veljalo $f(c_k)\,\delta_k > N$.



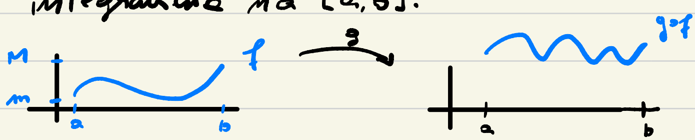
Torej je en člen v Riemannovi vsoti poljubno velik, torej zaporedje delnih vsot ne konvergira proti I, protislovje!

TRDITEV:

1) Če je f zvezna, potem je integrabilna.
2) Če je f monotona, potem je zvezna.
3) $m := \inf\{f(x);\ x \in [a,b]\}$
   $M := \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\}$

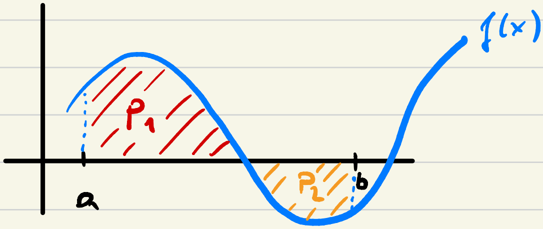
   Naj bo $g: [m,M] \to \mathbb{R}$ zvezna.

   Če je f integrabilna na $[a,b]$, potem je tudi $g \circ f$ integrabilna na $[a,b]$.



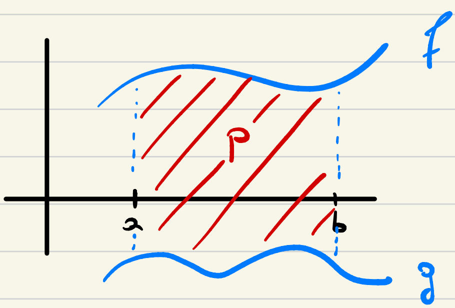
Povezava integrala s ploščino

$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2$, kjer je P_1 ploščina dela grafa nad osjo x, P_2 ploščina dela grafa pod osjo x; integral je torej enak predznačeni ploščini.



Ploščina med grafoma funkcij f, g, za kateri velja $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$:

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

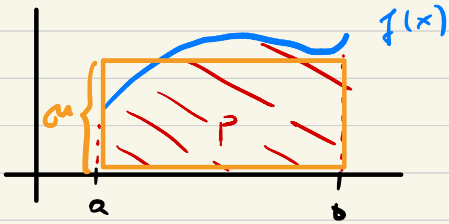


Dogovor: $\int_a^a f(x) = 0$, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Povprečna vrednost

Povprečna vrednost funk. f na $[a,b]$ je enaka

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$



Kakšen pravokotnik bi morali vzeti, da bi bila ploščina enaka P?

Odg: $P = (b-a)\cdot\mu$

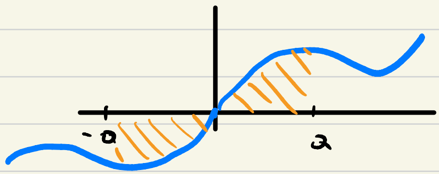
TRDITEV: Če je $f(x)$ zvezna na $[a,b]$, obstaja točka $c \in [a,b]$, da je $f(c) = \mu$ oz.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

TRDITEV: Naj bosta f, g integrabilni na $[a,b]$. Potem veljajo lastnosti:

- integrabilne so tudi $f+g$, $f \cdot g$ in $\lambda \cdot f$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

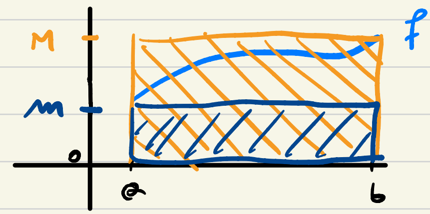
- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad , c \in (a,b)$
- $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, če je $f(x) \geq 0$ na $[a,b]$
- $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, če $f(x) \leq g(x)$ na $[a,b]$
- $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, če je f liha



- $\int_{-a}^a f(x) = 2 \int_0^a f(x)\,dx$, če je f soda

- Če je $m = \min\{f(x);\ x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x);\ x \in [a,b]\}$ potem velja

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a) \quad (*)$$



ZVEZA MED DOLOČENIM IN NEDOLOČENIM INTEGRALOM

Osnovni izrek integralskega računa:

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna. Potem velja

① Funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt ,$$
je zvezna.

integral kot funkcije zgornje meje

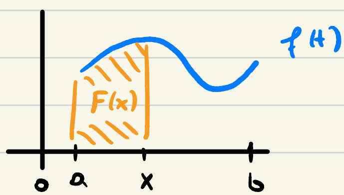
② Če je f zvezna v $x \in (a,b)$, potem je F odvedljiva v x in velja $F'(x) = f(x)$.

Posledica: če je f zvezna na (a,b), potem je F njen nedoločen integral.

PRIMER (fizikalen):

t .... čas
f ... hitrost
F ... pot

velja $f(t) = F'(t)$



DOKAZ točke ① : Preveriti želimo, da je F zvezna.

Izberemo si dve bližnji točki $x, \tilde{x} \in [a,b]$.

$$|F(x)-F(\tilde{x})| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{\tilde{x}} f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^{\tilde{x}} f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \begin{cases} \int_x^{\tilde{x}} |f(t)|\,dt \,; & \tilde{x} \geq x \\ \int_{\tilde{x}}^{x} |f(t)|\,dt \,; & \tilde{x} < x \end{cases} \overset{(*)}{\leq} M|\tilde{x}-x|,$$

kjer je M zgornja meja funk. $x \mapsto |f(x)|$.

Izberemo si $\varepsilon > 0$ in definiramo $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$.
Potem pa za vsak $x, \tilde{x}$: $|x-\tilde{x}| < \delta$, sledi

$$|F(x)-F(\tilde{x})| \leq M|x-\tilde{x}| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Torej je F zvezna v poljubni točki $x \in (a,b)$.

Newton-Leibnitzova formula : Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in je G njena primitivna funkcija, potem velja

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a) = G(x)\Big|_a^b}$$

Dokaz (ko je f zvezna): Vemo, da je $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$
$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, $F(a) = 0$.
Ker sta F in G primitivni za funk. f, potem obstaja

konstanta C, da je $(F-G)(x) = C$, $x \in [a,b]$.

$$G(b) - G(a) = (F(b) - \cancel{C}) - (F(a) - \cancel{C})$$

$$= F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Pravila za integriranje

① vpeljava nove spremenljivke

$x \rightsquigarrow u(x)$
$a \rightsquigarrow u(a)$
$b \rightsquigarrow u(b)$

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

② Per partes

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

ZGLED: ① $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx =$

$1 + x^4 = u$
$4x^3\,dx = du$

$x = 0 \rightsquigarrow u = 1$
$x = 2 \rightsquigarrow u = 17$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{17} \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\log 17 - \overbrace{\log 1}^{0}\Big)$$

(2) $\int_1^2 x^4 \log(x)\,dx = \left[\log(x)\,\frac{x^5}{5}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{5}\,dx$

$= \left(\log(2)\cdot\frac{32}{5} - 0\right) - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^2 = \frac{32}{5}\log(2) - \frac{32}{5} + \frac{1}{25}$

(3) $\int_0^3 |x^2-4|\,dx = \int_0^2 (4-x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2-4)\,dx$

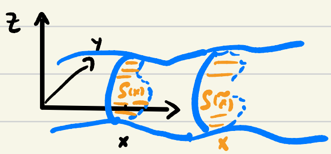
$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3$

$= 8 - \frac{8}{3} + \frac{27}{3} - 12 - \frac{8}{3} + 8 = \ldots = \frac{23}{3}$

Prostornine teles

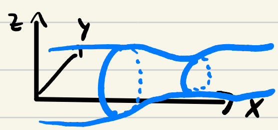
- Prostornina telesa, ki ima za vsak $x \in [a,b]$ ploščino prečnega preseka enako $S(x)$, je enaka

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

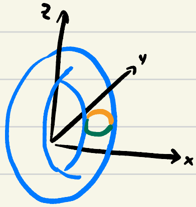


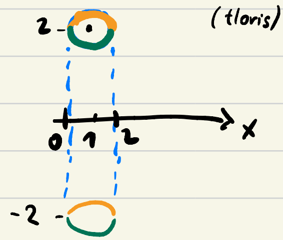
- Prostornina telesa, ki ga dobimo, če $f(x) \geq 0$ zavrtimo okoli osi x, je enaka

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$



ZGLED: Izračunajte volumen torusa, ki ga dobimo z vrtenjem krožnice $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ okrog osi x.





$$y_2(x) = 2+\sqrt{1-(x-1)^2} \quad \text{(zg. meja)}$$

$$y_2(x) = 2-\sqrt{1-(x-1)^2} \quad \text{(sp. meja)}$$

$$V = \pi \int_0^2 y_2^2(x)\,dx - \pi \int_0^2 y_1^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 (2+\sqrt{})^2 dx - \pi \int_0^2 (2-\sqrt{})^2 dx$$

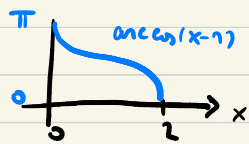
$$= \pi \int_0^2 \left(\cancel{2^2} + 4\sqrt{} + \cancel{\sqrt{}^2} - \cancel{2^2} + 4\sqrt{} - \cancel{\sqrt{}^2}\right) dx$$

$$= 8\pi \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

$\varphi \in [0,\pi]$

$x-1 = \cos\varphi \rightarrow dx = -\sin\varphi\, d\varphi$

$\arccos(x-1) = \varphi$



$$= 8\pi \int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2\varphi}\,(-\sin\varphi)\,d\varphi$$

$\sin\varphi \geq 0$

$$= 8\pi \int_0^\pi \sqrt{\sin^2\varphi}\,\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= 8\pi \int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = 8\pi \int_0^\pi \tfrac{1}{2}(1-\cos(2\varphi))\,d\varphi = 4\pi\left[\varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^\pi$$

$$= 4\pi\big((\pi-0)-(0-0)\big) = 4\pi^2$$